

Approfondissement

Mouvement dans un champ uniforme

Démonstrations générales, tirs contraints, déflecteur électrostatique : pour aller plus loin

7 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce que cette feuille ajoute au cours

- Mener *entièrement en littéral* l'étude d'un lancer : mouvement plan, équations horaires, trajectoire, flèche, portée, angle optimal.
- Traiter des situations contraintes (atteindre une cible au sol ou en hauteur, retomber sur un plan incliné), exploiter un relevé où la chute libre n'est plus valable, et comprendre pourquoi un déflecteur électrostatique ne sépare pas les isotopes.

Les passages signalés « *hors programme* » ne sont pas exigibles au baccalauréat : toutes les relations nécessaires y sont fournies.

Exercice 1 Le cas général, tout en littéral



Un projectile est lancé depuis l'origine O d'un repère $(O; x, y, z)$ d'axe (Oz) vertical ascendant, avec un vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ contenu dans le plan (xOz) et faisant l'angle α ($0 < \alpha < 90^\circ$) avec l'horizontale. Il n'est soumis qu'à son poids.

■ **DONNÉES** $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

- 1.1 Établir les coordonnées du vecteur accélération, puis, par intégration, celles du vecteur vitesse et du vecteur position. Justifier rigoureusement que le mouvement est plan.
- 1.2 Établir l'équation de la trajectoire $z(x)$ et justifier qu'il s'agit d'une parabole de concavité tournée vers le bas.
- 1.3 Montrer que la durée du vol (retour à $z = 0$) vaut $t_v = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$ et que la portée vaut $d = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$.
- 1.4 Montrer que la flèche vaut $h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ et qu'elle est atteinte à la date $t_v/2$. Établir la relation $h = \frac{d}{4} \tan \alpha$.
- 1.5 Pour quelle valeur de α la portée est-elle maximale, à v_0 fixée ? Que vaut alors la portée maximale $d_{\max}$? Et la flèche correspondante, en fonction de $d_{\max}$?
- 1.6 Retrouver, par une étude énergétique, la valeur de la vitesse du projectile au sommet de sa trajectoire, en fonction de v_0 et α .

Exercice 2 Deux angles pour la même cible



Un lanceur de secours envoie un filin à une vitesse de valeur $v_0 = 28,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ vers un bateau en détresse situé à $D = 60,0 \text{ m}$, au même niveau. On reprend les expressions établies à l'exercice 1.

■ **DONNÉES** $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

- 2.1 Calculer la portée maximale du lanceur. Le bateau est-il à portée ?
- 2.2 Montrer que les angles de tir permettant d'atteindre le bateau vérifient $\sin(2\alpha) = \frac{gD}{v_0^2}$, puis calculer les deux valeurs de α solutions.
- 2.3 Démontrer, dans le cas général, que deux angles α et $90^\circ - \alpha$ donnent toujours la même portée. Vérifier sur les deux valeurs trouvées.

- 2.4 Pour chacun des deux tirs, calculer la durée du vol et la flèche. Lequel est appelé « tir tendu », lequel « tir en cloche » ? Si un vent latéral souffle sur la zone, lequel faut-il préférer ?

Exercice 3 Le saut à ski : retomber sur la pente



(Réception sur un plan incliné : hors programme — pour aller plus loin. Toutes les relations utiles sont établies dans l'exercice.)

Un sauteur à ski quitte le tremplin en O avec une vitesse horizontale de valeur $v_0 = 25,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. La piste de réception est un plan incliné d'un angle $\beta = 35^\circ$ sous l'horizontale, dont le sommet est en O (figure 1). On néglige la résistance de l'air et la portance des skis.

- 3.1 Écrire les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement du centre de masse du sauteur.

- 3.2 Le point de réception appartient à la pente : justifier qu'il vérifie $z = -x \tan \beta$. En déduire que la durée du vol vaut $t_v = \frac{2v_0 \tan \beta}{g}$ et la calculer.

- 3.3 Calculer les coordonnées du point de réception, puis la longueur $L = OP$ du saut, mesurée le long de la pente.

- 3.4 Établir l'expression littérale de L en fonction de v_0 , g et β , et vérifier le résultat précédent.

- 3.5 Calculer les coordonnées du vecteur vitesse à la réception, puis la valeur de cette vitesse en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$; commenter en la comparant aux $100 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ environ mesurés en compétition.

- 3.6 Sans refaire les calculs, indiquer comment varie la longueur du saut si la pente est plus raide (β plus grand).

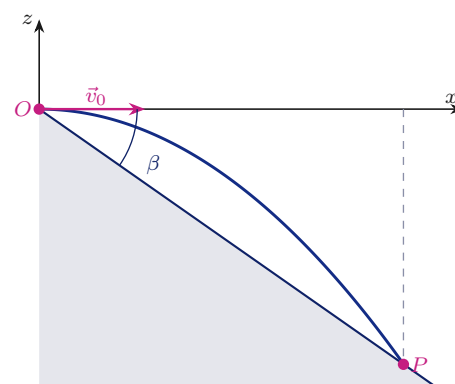


Figure 1 — Le saut et la pente de réception. L'axe (Oz) est orienté vers le haut.

■ DONNÉES $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

Exercice 4 Un déflecteur électrostatique sépare-t-il les isotopes ?



Un ion positif de charge $q = +e$ et de masse m , initialement au repos, est d'abord accéléré entre deux grilles planes soumises à la tension $U_0 = 4,00 \text{ kV}$. Il pénètre ensuite, avec une vitesse horizontale de valeur v , à mi-distance entre deux plaques horizontales de longueur $L = 10,0 \text{ cm}$, distantes de $D = 2,00 \text{ cm}$ et soumises à la tension $U_1 = 200 \text{ V}$. Le poids est négligé devant les forces électriques.

■ DONNÉES charge élémentaire $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$ • unité de masse atomique $u = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$

- 4.1 À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, montrer que la vitesse à l'entrée du déflecteur vaut

$$v = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}.$$

- 4.2 Établir l'expression de la déviation y_1 subie par l'ion à la sortie des plaques, en fonction de e , U_1 , D , L , m et v .

- 4.3 En reportant l'expression de v , montrer que $y_1 = \frac{U_1 L^2}{4U_0 D}$: la déviation ne dépend ni de la masse, ni de la charge de l'ion. Calculer y_1 et vérifier que l'ion sort effectivement du déflecteur.

- 4.4 On étudie un mélange des isotopes $^{20}\text{Ne}^+$ et $^{22}\text{Ne}^+$ (masses respectives $20u$ et $22u$). Calculer la vitesse v de chacun à l'entrée du déflecteur. Les deux faisceaux sont-ils séparés à la sortie ? Conclure sur le principe de fonctionnement d'un spectromètre de masse.

- 4.5 (Hors programme — pour aller plus loin.) Dans un champ magnétique, un ion de vitesse v décrit un cercle de rayon $R = \frac{mv}{eB}$. Montrer qu'alors R dépend de la masse de l'ion et que les deux isotopes sont cette fois séparés ; calculer le rapport R_{22}/R_{20} .

Exercice 5 Quand la chute libre ne suffit plus



Une balle de ping-pong de masse $m = 2,7 \text{ g}$ est lancée depuis le sol avec une vitesse de valeur $v_0 = 12,00 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ faisant un angle $\alpha = 40^\circ$ avec l'horizontale. Un relevé vidéo fournit la position de son centre de masse et la valeur v de sa vitesse (tableau ci-dessous ; l'axe (Oz) est vertical ascendant, l'origine étant au point de lancer).

$t \text{ (s)}$	0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20
$x \text{ (m)}$	0,00	1,61	2,89	3,98	4,94	5,77	6,50
$z \text{ (m)}$	0,00	1,17	1,75	1,87	1,62	1,02	0,14
$v \text{ (m}\cdot\text{s}^{-1})$	12,00	8,24	6,12	5,10	4,96	5,39	6,04

■ **DONNÉES** $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

- 5.1 Dans le modèle de la chute libre, calculer la portée, la flèche et la durée du vol de la balle. Comparer aux valeurs du tableau et conclure.
- 5.2 Montrer, à partir des abscisses du tableau, que la composante horizontale du vecteur vitesse n'est pas constante. Quelle force, négligée jusqu'ici, met-on ainsi en évidence ?
- 5.3 Calculer E_c , E_{pp} et E_m aux dates 0 s, 0,60 s et 1,20 s. L'énergie mécanique est-elle conservée ?
- 5.4 En déduire le travail des forces de frottement de l'air entre le départ et la date 1,20 s, ainsi que le pourcentage de l'énergie mécanique initiale dissipée.
- 5.5 Le sommet de la trajectoire est atteint vers 0,60 s, alors que la valeur de la vitesse est minimale vers 0,80 s. Expliquer ce décalage, alors qu'en chute libre ces deux instants coïncident.
- 5.6 Le même lancer est refait avec une balle de golf de même diamètre, de masse 45 g. Le modèle de la chute libre sera-t-il plus ou moins satisfaisant ? Justifier en comparant l'ordre de grandeur de la force de frottement au poids.

Exercice 6 Résolution de problème : atteindre la fenêtre



Des pompiers doivent envoyer de l'eau dans une fenêtre en flammes située à 12,0 m de hauteur, sur une façade distante de 15,0 m de la lance. La lance, placée au niveau du sol, éjecte l'eau à la vitesse de valeur $v_0 = 25,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et son inclinaison α est réglable. Chaque goutte d'eau est supposée en chute libre.

■ **DONNÉES** $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ • $1 + \tan^2 \alpha = 1/\cos^2 \alpha$

Déterminer les inclinaisons possibles de la lance permettant d'atteindre la fenêtre, puis indiquer, en la justifiant, celle que les pompiers ont intérêt à choisir. On pourra partir de l'équation de la trajectoire et utiliser $1 + \tan^2 \alpha = 1/\cos^2 \alpha$ pour obtenir une équation du second degré d'inconnue $\tan \alpha$. Toute démarche, même partielle, sera valorisée.

Exercice 7 Le lancer du marteau sur la Lune



Le record du monde du lancer du marteau (boulet de 7,26 kg relié à un câble) est de 86,74 m. Pour simplifier, on suppose que le marteau quitte la main de l'athlète au niveau du sol, avec un angle de tir de 45° , et qu'il est ensuite en chute libre. L'intensité de la pesanteur vaut $g_L = 1,62 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ à la surface de la Lune.

■ **DONNÉES** $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

- 7.1 Montrer que, pour un tir à 45° depuis le sol, la vitesse initiale s'exprime par $v_0 = \sqrt{gd}$. En déduire la valeur de v_0 correspondant au record.
- 7.2 Calculer l'énergie cinétique communiquée au marteau, ainsi que la hauteur maximale atteinte lors du record.
- 7.3 Le même athlète réalise ce lancer sur la Lune, avec la même vitesse initiale et le même angle. Calculer la portée du lancer et la durée du vol. Commenter.
- 7.4 Sans nouveau calcul, expliquer pourquoi le rapport des portées est égal au rapport g/g_L , quelles que soient v_0 et α . Le modèle de la chute libre est-il par ailleurs mieux adapté sur la Lune que sur la Terre ?