

Approfondissement

Mouvement dans un champ de gravitation

Démonstrations littérales, énergie d'un satellite, transfert d'orbite, exoplanètes : pour aller plus loin

7 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce que cette feuille ajoute au cours

- Mener *entièrement en littéral* l'étude d'un satellite en orbite circulaire, jusqu'à des résultats inattendus (la période d'une orbite rasante ne dépend que de la masse volumique de l'astre).
- Aller au-delà du programme : énergie d'un satellite, changement d'orbite, détection d'exoplanètes par vitesses radiales ; traiter une série de mesures (incertitude de type A, écart normalisé) et estimer la masse de notre Galaxie.

Les passages signalés « hors programme » ne sont pas exigibles au baccalauréat : toutes les relations nécessaires y sont fournies.

Exercice 1 Tout en littéral : une période qui ne dépend que de la masse volumique ●●●

Un satellite de masse m décrit une orbite circulaire de rayon r autour d'un astre de masse M et de rayon R , supposé à répartition sphérique de masse.

■ DONNÉES $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ • $R_T = 6\,371 \text{ km}$

- 1.1 Établir, dans le repère de Frenet, que le mouvement est uniforme, puis les expressions de v et de T en fonction de G , M et r . Vérifier l'homogénéité de l'expression de T par une analyse dimensionnelle.
- 1.2 Exprimer la masse M de l'astre en fonction de sa masse volumique moyenne ρ et de son rayon R .
- 1.3 On appelle *orbite rasante* l'orbite circulaire de rayon $r = R$. Montrer que sa période s'écrit $T_0 = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$: elle ne dépend ni de M , ni de R , mais seulement de la masse volumique moyenne de l'astre.
- 1.4 Calculer T_0 pour la Terre ($\rho = 5\,510 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) et pour la Lune ($\rho = 3\,344 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). Commenter le fait que ces deux durées soient si proches, alors que les deux astres sont très différents.
- 1.5 En déduire la vitesse d'un satellite en orbite rasante autour de la Terre, appelée *première vitesse cosmique*. Pourquoi aucune orbite terrestre ne peut-elle avoir une période inférieure à T_0 ?
- 1.6 Un astéroïde sphérique de masse volumique $2,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ tourne sur lui-même en 1,5 h : montrer, en comparant cette durée à T_0 , qu'un caillou posé à son équateur ne peut y rester.

Exercice 2 L'énergie d'un satellite ●●●

(Hors programme — pour aller plus loin. Toutes les relations utiles sont fournies.)

On admet que l'énergie potentielle de gravitation d'un satellite de masse m situé à la distance r du centre d'un astre de masse M s'écrit $E_p = -\frac{GMm}{r}$, l'énergie potentielle étant choisie nulle à l'infini.

■ DONNÉES $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ • $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6\,371 \text{ km}$

- 2.1 Pour une orbite circulaire de rayon r , exprimer l'énergie cinétique E_c du satellite en fonction de G , M , m et r , puis montrer que $E_c = -\frac{E_p}{2}$ et que l'énergie mécanique vaut $E_m = -\frac{GMm}{2r}$.
- 2.2 Un satellite de masse $m = 2,0 \times 10^3 \text{ kg}$ passe d'une orbite de rayon $r_1 = 6,80 \times 10^6 \text{ m}$ à une orbite de rayon $r_2 = 1,20 \times 10^7 \text{ m}$: calculer l'énergie à lui fournir.

- 2.3** Sur l'orbite haute, sa vitesse est pourtant plus faible que sur l'orbite basse. Expliquer ce paradoxe apparent à l'aide des énergies E_c et E_p .
- 2.4** Les frottements résiduels de la haute atmosphère dissipent de l'énergie mécanique : montrer que le rayon de l'orbite diminue et que la vitesse du satellite *augmente*. Commenter.
- 2.5** On appelle *vitesse de libération* v_ℓ la vitesse minimale qu'il faut communiquer à un objet depuis la surface de la Terre pour qu'il s'en échappe, c'est-à-dire pour que son énergie mécanique soit nulle. Établir $v_\ell = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$ et la calculer. Comparer à la première vitesse cosmique de l'exercice 1.

Exercice 3 Le transfert de Hohmann



(Hors programme — pour aller plus loin.)

Pour amener un satellite d'une orbite circulaire basse de rayon $r_1 = 6,671 \times 10^6$ m à l'orbite géostationnaire de rayon $r_2 = 4,216 \times 10^7$ m, on utilise une ellipse de transfert tangente aux deux orbites (figure 1) : le satellite est accéléré en P , parcourt une demi-ellipse, puis est de nouveau accéléré en A . On admet que, sur une orbite elliptique de demi-grand axe a , la vitesse à la distance r de l'astre vérifie $v^2 = GM_T \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$.

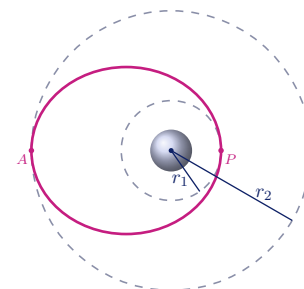


Figure 1 — L'ellipse de transfert (en rose), sans échelle

- 3.1** Justifier que le demi-grand axe de l'ellipse de transfert vaut $a = \frac{r_1 + r_2}{2}$ et le calculer.
- 3.2** En appliquant la troisième loi de Kepler à l'ellipse de transfert, montrer que la durée du transfert, égale à une demi-période, vaut 5,3 h.
- 3.3** Calculer les vitesses v_1 et v_2 du satellite sur les deux orbites circulaires.
- 3.4** Calculer la vitesse du satellite en P puis en A sur l'ellipse de transfert. En déduire les deux variations de vitesse Δv_1 et Δv_2 que les moteurs doivent fournir.
- 3.5** Vérifier que la vitesse en A est bien inférieure à v_2 : que se passerait-il si le second allumage n'avait pas lieu ?

■ **DONNÉES** $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ • $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$

Exercice 4 Peser la Terre avec un chronomètre



Un club d'astronomie chronomètre six fois de suite la période de révolution de la Station spatiale internationale, dont le rayon d'orbite vaut $r = 6,771 \times 10^6$ m. Les mesures, en minutes, sont : 92,3 ; 92,8 ; 92,1 ; 92,6 ; 92,9 ; 92,4.

■ **DONNÉES** $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ • $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$

- 4.1** Calculer la valeur moyenne $\bar{T}$ des six mesures, en minutes puis en secondes, ainsi que l'écart-type s de la série.
- 4.2** L'incertitude-type de type A sur la période vaut $u(T) = \frac{s}{\sqrt{n}}$, où n est le nombre de mesures. Calculer $u(T)$ en secondes.
- 4.3** Établir l'expression de la masse de la Terre en fonction de r , T et G , puis calculer M_T à partir de $\bar{T}$.
- 4.4** On admet que $\frac{u(M)}{M} = 2 \frac{u(T)}{T}$. Calculer $u(M)$ et écrire le résultat de la mesure sous la forme $M_T = (\dots \pm \dots) \times 10^{24} \text{ kg}$.
- 4.5** Comparer à la valeur de référence en calculant l'écart normalisé $z = \frac{|M_{\text{mes}} - M_{\text{réf}}|}{u(M)}$. Le résultat est-il compatible avec la valeur attendue (on considère qu'il y a compatibilité si $z < 2$) ?
- 4.6** Combien de mesures faudrait-il pour diviser par deux l'incertitude sur M_T ? Citer une source d'incertitude de type B non prise en compte ici.

Exercice 5 Le rendez-vous orbital



Un vaisseau cargo est placé sur une orbite circulaire d'altitude $h_1 = 350 \text{ km}$ pour rejoindre la Station spatiale internationale, en orbite circulaire d'altitude $h_2 = 400 \text{ km}$. Au moment de la mise en orbite du cargo, la station est « en avance » sur lui d'un demi-tour.

■ **DONNÉES** $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ • $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6371 \text{ km}$

- 5.1 Calculer les périodes de révolution T_1 du cargo et T_2 de la station, en secondes, avec quatre chiffres significatifs. Laquelle est la plus courte ? Justifier sans calcul.
- 5.2 Pour chacun des deux engins, calculer la vitesse angulaire $\omega = \frac{2\pi}{T}$, en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.
- 5.3 Montrer que le cargo rattrape la station d'un angle $\Delta\theta = (\omega_1 - \omega_2)T_1$ à chaque tour qu'il effectue, et calculer $\Delta\theta$ en degrés.
- 5.4 En déduire la durée nécessaire pour que le cargo rattrape son retard d'un demi-tour, en jours, ainsi que le nombre de tours qu'il aura alors effectués.
- 5.5 Une fois le cargo juste « sous » la station, comment doit-on modifier sa vitesse pour l'amener sur l'orbite de la station ? Ce résultat est-il cohérent avec l'exercice 3 ? Expliquer enfin pourquoi les agences spatiales choisissent soigneusement l'instant du lancement (« fenêtre de tir »).

Exercice 6 51 Pegasi b, la première exoplanète



(La méthode des vitesses radiales est hors programme ; toutes les relations utiles sont fournies.)

Une étoile et sa planète tournent en réalité autour de leur centre de masse commun : la vitesse de l'étoile, mesurée par effet Doppler, oscille donc périodiquement (figure 2, étoile 51 Pegasi, de masse $M_\star = 2,21 \times 10^{30} \text{ kg}$). On admet la relation $M_\star v_\star = m_p v_p$, où $v_\star$ est l'amplitude mesurée et v_p la vitesse de la planète de masse m_p sur son orbite.

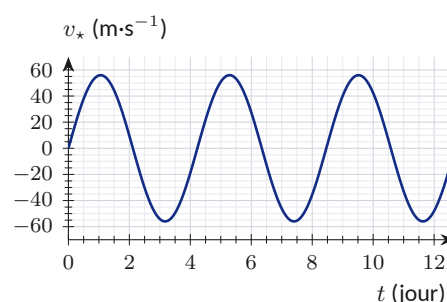


Figure 2 — Vitesse radiale de l'étoile 51 Pegasi

- 6.1 Déterminer graphiquement la période T du signal, en jours, ainsi que l'amplitude $v_\star$. Pour la suite on prendra $T = 4,23 \text{ j}$: convertir cette valeur en secondes.
- 6.2 Justifier que T est aussi la période de révolution de la planète, puis calculer le rayon a de son orbite en mètres et en ua. Comparer au rayon de l'orbite de Mercure ($0,387 \text{ ua}$) et commenter.
- 6.3 Calculer la vitesse v_p de la planète sur son orbite.
- 6.4 En déduire la masse de la planète, puis l'exprimer en masses de Jupiter. Quel nom donne-t-on à ce type d'objet ?
- 6.5 Cette méthode ne donne qu'une valeur *minimale* de m_p , car l'orbite n'est en général pas vue par la tranche : expliquer qualitativement pourquoi l'amplitude mesurée $v_\star$ est alors plus faible que la vitesse réelle de l'étoile sur son orbite.

■ **DONNÉES** $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$
 • $1 \text{ ua} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$ • $M_{\text{Jupiter}} = 1,898 \times 10^{27} \text{ kg}$

Exercice 7 Résolution de problème : combien pèse la Voie lactée ?



Le Soleil se situe à $R = 8,2$ kiloparsecs du centre de la Voie lactée et tourne autour de ce centre à $230 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. On admet que la masse intérieure à son orbite est concentrée au centre.

■ **DONNÉES** $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ • $M_\odot = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ • $1 \text{ parsec} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m}$ • $1 \text{ année} = 3,156 \times 10^7 \text{ s}$

Déterminer la durée d'un tour de Galaxie du Soleil, puis estimer cette masse en kilogrammes et en masses solaires. Les observations montrent qu'à 25 kiloparsecs du centre, là où l'on ne voit pratiquement plus d'étoiles, la vitesse de rotation vaut encore $220 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$: calculer la vitesse que l'on attendrait avec la masse trouvée ci-dessus, puis la masse qu'il faudrait réellement, et indiquer ce que ce désaccord a suggéré aux astrophysiciens.