

Exercices 2 Écoulement d'un fluide

Application : débitmètre, château d'eau, vidange, trompe à eau, Pitot, aile, montgolfière

7 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 1 h 45 · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Combiner conservation du débit et relation de Bernoulli pour exploiter un dispositif réel : débitmètre à Venturi, trompe à eau, tube de Pitot, aile d'avion.
- Traiter un problème de réseau d'eau (château d'eau, vidange d'un réservoir) et comparer systématiquement la prévision du modèle du fluide parfait à la mesure.
- Exploiter la poussée d'Archimède dans l'air (montgolfière).

Sauf mention contraire, tous les fluides sont supposés parfaits, incompressibles, et les écoulements permanents.

Exercice 1 Le débitmètre à Venturi d'une station de pompage

●●○

Pour mesurer le débit d'eau d'une conduite horizontale sans pièce mobile, on y intercale un *tube de Venturi* : la conduite, de diamètre $D_1 = 100$ mm, se rétrécit progressivement jusqu'à un col de diamètre $D_2 = 50,0$ mm, puis retrouve son diamètre initial. Deux tubes verticaux ouverts à l'air libre sont branchés en A (conduite) et en B (col) ; l'eau y monte respectivement aux hauteurs h_A et h_B , avec $h_A - h_B = 1,10$ m.

- 1.1 Calculer les aires des sections S_1 et S_2 , puis exprimer v_B en fonction de v_A .
- 1.2 Exprimer la différence de pression $P_A - P_B$ en fonction de ρ_{eau} , g et $h_A - h_B$, puis la calculer.
- 1.3 En appliquant la relation de Bernoulli entre A et B, montrer que $P_A - P_B = \frac{15}{2} \rho_{\text{eau}} v_A^2$, puis calculer v_A et v_B .
- 1.4 En déduire le débit volumique de la conduite en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, puis en $\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$.
- 1.5 Le compteur volumétrique installé en aval indique $33,2 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$. Calculer l'écart relatif entre les deux mesures et proposer une explication.

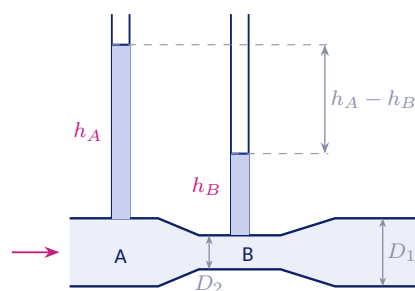


Figure 1 — Tube de Venturi et ses deux tubes manométriques

■ DONNÉES $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ • $\rho_{\text{eau}} = 1,00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Exercice 2 La vidange d'une cuve de récupération d'eau de pluie

●●○

Une cuve cylindrique de section $S = 0,80 \text{ m}^2$, ouverte à l'air libre, contient de l'eau sur une hauteur $h_0 = 1,25$ m. On ouvre au fond une vanne dont l'orifice a une section $s = 4,0 \text{ cm}^2$; l'eau s'écoule à l'air libre.

■ DONNÉES $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

- 2.1 À l'aide de la conservation du débit, comparer la vitesse de descente de la surface libre à la vitesse d'éjection. Justifier que l'on puisse négliger la première.
- 2.2 Établir la formule de Torricelli $v = \sqrt{2gh}$, puis calculer la vitesse d'éjection initiale et le débit volumique initial, en $\text{L} \cdot \text{s}^{-1}$.
- 2.3 Calculer le volume d'eau contenu dans la cuve. En supposant (à tort) le débit constant, quelle serait la durée de la vidange ?

- 2.4** On admet que la durée réelle de la vidange vaut $t_{\text{vid}} = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$. La calculer, en minutes. Montrer qu'elle vaut exactement le double de l'estimation précédente et expliquer ce facteur 2.
- 2.5** Calculer la vitesse d'éjection et le débit lorsque la cuve est à moitié vide. Le débit a-t-il été divisé par deux ?

Exercice 3 Le château d'eau d'un village



Le château d'eau d'un village de 3000 habitants est un réservoir cylindrique de diamètre $D = 12,0$ m, ouvert à l'air libre, contenant une hauteur d'eau de 8,00 m. La surface libre de l'eau est à l'altitude $z_A = 42,0$ m; un robinet d'une habitation est à l'altitude $z_B = 6,0$ m.

- 3.1** Calculer le volume d'eau stocké. La consommation moyenne étant de 150 L par habitant et par jour, déterminer l'autonomie du village.
- 3.2** Le robinet est fermé. Calculer la pression de l'eau juste derrière le robinet, en bars, ainsi que la surpression par rapport à l'atmosphère.
- 3.3** On ouvre le robinet : appliquer la relation de Bernoulli entre la surface libre A et la sortie B, à l'air libre, en négligeant la vitesse en A. Calculer la vitesse de sortie prévue par le modèle. Commenter.
- 3.4** Le village consomme au total $30,0 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$ en heure de pointe. Calculer la vitesse de descente de la surface libre dans le réservoir, en $\text{m} \cdot \text{h}^{-1}$.
- 3.5** Un promoteur veut construire un immeuble dont les robinets du dernier étage seraient à l'altitude 45 m. Que se passera-t-il ? Quelle solution technique proposer ?

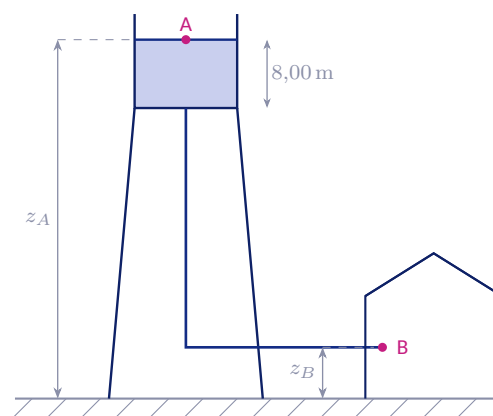


Figure 2 — Le réseau gravitaire (schéma sans échelle)

■ **DONNÉES** $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ • $\rho_{\text{eau}} = 1,00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ • $P_{\text{atm}} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$ • $1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$

Exercice 4 La trompe à eau du laboratoire



Une trompe à eau permet de faire le vide dans un flacon pour accélérer une filtration. Elle est constituée d'un tube horizontal, de section $S_1 = 1,50 \text{ cm}^2$, alimenté par le robinet avec un débit $D_v = 0,200 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$, et dont le col a une section $S_2 = 0,250 \text{ cm}^2$. Un tube latéral relie le col au flacon à vider. En A, la pression de l'eau vaut $P_A = P_{\text{atm}}$.

- 4.1** Calculer les vitesses v_A et v_B de l'eau en A et au col B.
- 4.2** En appliquant la relation de Bernoulli, calculer la pression P_B au col, en pascals puis en bars, ainsi que la dépression $P_{\text{atm}} - P_B$. Pourquoi l'air du flacon est-il aspiré ?
- 4.3** La trompe aspire l'eau d'un bécier placé plus bas. Montrer que la hauteur maximale d'aspiration vaut $h_{\text{max}} = \frac{P_{\text{atm}} - P_B}{\rho_{\text{eau}} g}$ et la calculer.
- 4.4** Quel débit faudrait-il, selon ce modèle, pour obtenir $P_B = 0$? Pourquoi ce résultat est-il dépourvu de sens (l'eau se vaporise au-dessous de $2,3 \times 10^3 \text{ Pa}$ à 20°C) ?

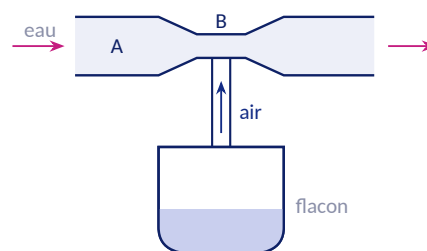


Figure 3 — Principe de la trompe à eau

■ **DONNÉES** $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ • $\rho_{\text{eau}} = 1,00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ • $P_{\text{atm}} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$ • $1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$

Exercice 5 Le tube de Pitot : mesurer une vitesse



Un tube de Pitot comporte deux prises de pression : l'une, latérale, mesure la pression P_s du fluide qui s'écoule à la vitesse v ; l'autre, frontale, mesure la pression P_t au point d'arrêt, où le fluide est immobilisé. Les deux points sont à la même altitude.

■ **DONNÉES** $\rho_{\text{mer}} = 1,025 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

- 5.1 En appliquant la relation de Bernoulli le long de la ligne de courant qui aboutit au point d'arrêt, montrer que $P_t - P_s = \frac{1}{2} \rho v^2$, puis exprimer v .
- 5.2 Un voilier naviguant en mer est équipé d'un tube de Pitot immergé. Le capteur indique $P_t - P_s = 2,00 \times 10^4 \text{ Pa}$. Calculer la vitesse du bateau par rapport à l'eau, en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ puis en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.
- 5.3 Un avion léger vole au niveau de la mer, où $\rho_{\text{air}} = 1,22 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; son tube de Pitot mesure $P_t - P_s = 1,80 \times 10^3 \text{ Pa}$. Calculer sa vitesse en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.
- 5.4 Le même avion monte à 8 000 m, où $\rho_{\text{air}} = 0,53 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, et le capteur indique toujours $1,80 \times 10^3 \text{ Pa}$. Calculer sa vitesse réelle. Pourquoi un anémomètre gradué en supposant $\rho = 1,22 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ sous-estime-t-il la vitesse en altitude ?
- 5.5 Un tube de Pitot obstrué par du givre indique une différence de pression nulle. Quelle vitesse affiche alors l'instrument ? Pourquoi est-ce dangereux ?

Exercice 6 La portance d'une aile



En vol, l'air contourne l'aile plus vite à l'extrados qu'à l'intrados. Pour un petit avion en croisière, on mesure $v_e = 85,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $v_i = 70,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ en deux points situés à la même altitude ; l'aile a une surface totale $S = 16,0 \text{ m}^2$ et $\rho_{\text{air}} = 1,20 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

- 6.1 En appliquant la relation de Bernoulli, montrer que $P_i - P_e = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} (v_e^2 - v_i^2)$ et calculer cette différence de pression.
- 6.2 En déduire la valeur de la force de portance exercée sur l'aile, ainsi que la masse maximale de l'avion pouvant être soutenue en vol horizontal.
- 6.3 L'avion vole 30 % moins vite, les vitesses v_e et v_i étant réduites dans la même proportion. Calculer la nouvelle portance et conclure.
- 6.4 Le modèle du fluide parfait ne comporte aucune force de frottement : en toute rigueur, il prévoit donc une traînée nulle. Pourquoi une aile réelle a-t-elle malgré tout besoin d'un moteur pour avancer ?

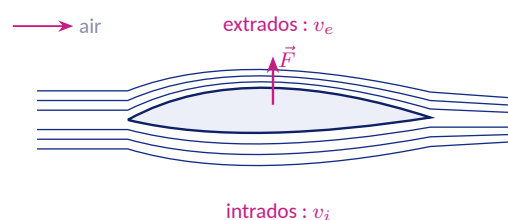


Figure 4 — Lignes de courant autour d'un profil d'aile

■ **DONNÉES** $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

Exercice 7 La montgolfière



L'enveloppe d'une montgolfière, ouverte par le bas, a un volume $V = 2\,200 \text{ m}^3$; l'ensemble {enveloppe + nacelle + passagers}, sans l'air chaud, a une masse $m_0 = 600 \text{ kg}$. L'air extérieur est à 15°C ($T_0 = 288 \text{ K}$), de masse volumique $\rho_0 = 1,22 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; à pression constante, l'air chaud à la température T (en kelvins) a pour masse volumique $\rho = \rho_0 T_0/T$.

■ **DONNÉES** $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

- 7.1 Calculer la valeur de la poussée d'Archimède exercée par l'air extérieur sur la montgolfière.
- 7.2 L'air intérieur est porté à 100°C . Calculer sa masse volumique, puis la masse de l'air chaud contenu dans l'enveloppe et la masse totale du système.
- 7.3 Faire le bilan des forces, puis calculer la valeur de l'accélération de la montgolfière au décollage. Commenter cette valeur.
- 7.4 Déterminer la température minimale de l'air intérieur permettant le décollage.

- 7.5** Le pilote embarque un passager supplémentaire de 75 kg. Doit-il chauffer davantage ou moins ? Justifier sans calcul, puis donner la nouvelle température minimale.