

Exercices 1

Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

Les bases : arbres et épreuves indépendantes, loi de Bernoulli, schéma de Bernoulli, loi binomiale

10 exercices · niveau ●○○ à ●●○ · durée conseillée : 2 h 15 · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Représenter une succession d'épreuves indépendantes par un arbre, calculer la probabilité d'une issue par un produit.
- Reconnaître une épreuve puis un schéma de Bernoulli; identifier les paramètres n et p d'une loi binomiale.
- Calculer $P(X = k)$ par la formule, puis $P(X \leq k)$, $P(X \geq k)$, $P(a \leq X \leq b)$ à la calculatrice; calculer $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$; résoudre un problème de seuil.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- **Épreuves indépendantes.** Lors d'une succession de n épreuves indépendantes, une issue est un n -uplet de résultats et sa probabilité est le *produit* des probabilités de ses composantes : c'est le produit des probabilités portées par le chemin correspondant de l'arbre.
- **Bernoulli.** Une *épreuve de Bernoulli* de paramètre p n'a que deux issues, succès (probabilité p) et échec (probabilité $1 - p$); la variable X valant 1 en cas de succès et 0 sinon suit la *loi de Bernoulli* : $E(X) = p$, $V(X) = p(1 - p)$. Répéter n fois cette épreuve, de façon identique et *indépendante*, constitue un *schéma de Bernoulli*.
- **Loi binomiale.** Le nombre X de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$: X prend ses valeurs dans $\{0; 1; \dots; n\}$ et, pour $0 \leq k \leq n$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p), \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

- **Événements utiles.** $P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$; $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$; $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$.

Exercice 1 Deux étapes de fabrication

●○○

Une pièce mécanique est fabriquée en deux étapes *indépendantes*. À la première étape, un défaut apparaît avec la probabilité 0,05; à la seconde, avec la probabilité 0,08. On note D_1 (resp. D_2) l'événement « un défaut apparaît à la première (resp. seconde) étape » : l'arbre de la figure 1 modélise la situation.

- 1.1 Recopier l'arbre et écrire, au bout de chacun des quatre chemins, la probabilité de l'issue correspondante.
- 1.2 Calculer la probabilité qu'aucun défaut n'apparaisse, puis celle qu'exactly un défaut apparaisse.
- 1.3 En déduire de deux façons différentes la probabilité qu'au moins un défaut apparaisse.

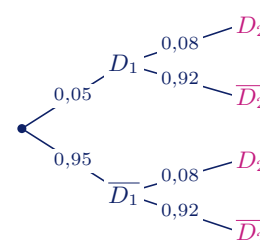


Figure 1 — Les deux étapes

Exercice 2 Trois lancers d'une pièce truquée

●○○

Une pièce truquée tombe sur Pile avec la probabilité 0,6. On la lance trois fois de suite, les lancers étant indépendants, et on note dans l'ordre les côtés obtenus.

- 2.1 Combien l'expérience admet-elle d'issues ? Ces issues sont-elles équiprobables ?
- 2.2 Calculer la probabilité de chacune des issues PPP, PFP et FFF.
- 2.3 Déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux fois Pile (*trois chemins sont favorables*), puis celle d'obtenir au moins une fois Pile.

Exercice 3 Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli

●○○

- 3.1 Parmi les trois expériences suivantes, dire lesquelles sont des épreuves de Bernoulli ; pour celles-ci, préciser le succès choisi et sa probabilité : **(a)** lancer un dé équilibré et noter le numéro obtenu ; **(b)** lancer un dé équilibré et regarder si le numéro est un multiple de 3 ; **(c)** tirer une carte dans un jeu de 32 cartes et regarder si c'est un cœur.
- 3.2 Un basketteur réussit un lancer franc avec la probabilité 0,35. Il en tente un et X vaut 1 s'il le réussit, 0 sinon. Donner la loi de X dans un tableau, puis $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi à 10^{-3}).
- 3.3 On lance un dé équilibré et le succès est « obtenir un multiple de 3 ». Donner l'espérance et la variance de la variable de Bernoulli associée, sous forme de fractions irréductibles.

Exercice 4 Est-ce un schéma de Bernoulli ?

●○○

Pour chaque situation, dire si X suit une loi binomiale : si oui, préciser n et p ; si non, indiquer la condition qui n'est pas remplie.

- 4.1 Une urne contient 10 boules dont 4 rouges ; on tire 5 boules successivement *avec* remise et X compte les rouges.
- 4.2 Même urne, mais les 5 boules sont tirées successivement *sans* remise et X compte les rouges.
- 4.3 Un élève répond au hasard aux 15 questions d'un QCM à 4 réponses dont une seule exacte ; X est son nombre de bonnes réponses.
- 4.4 On lance 12 fois un dé équilibré et X est la somme des numéros obtenus.

Exercice 5 De la formule à la calculatrice

●○○

- 5.1 La variable X suit la loi $\mathcal{B}(6; 0,25)$. Justifier que $P(X = 2) = \binom{6}{2} \times 0,25^2 \times 0,75^4$, puis calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 6)$ (arrondis à 10^{-4}). En déduire $P(X \geq 2)$.
- 5.2 La variable Y suit la loi $\mathcal{B}(20; 0,3)$. Déterminer à la calculatrice les probabilités suivantes, arrondies à 10^{-4} , en précisant à chaque fois la fonction utilisée.

a) $P(Y = 6)$
b) $P(Y \leq 6)$
c) $P(Y \geq 8)$
d) $P(4 \leq Y \leq 9)$

Exercice 6 Espérance, variance, écart type

●●○

- 6.1 Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi à 10^{-3}) lorsque X suit la loi :

a) $\mathcal{B}(50; 0,02)$
b) $\mathcal{B}(30; 0,4)$
c) $\mathcal{B}(100; 0,15)$
- 6.2 Une variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p telle que $E(X) = 12$ et $V(X) = 4,8$. Déterminer p , puis n .
- 6.3 Un dé équilibré est lancé 60 fois et S compte les 6 obtenus. Donner la loi de S , puis $E(S)$ et $\sigma(S)$ (arrondi à 10^{-2}) ; interpréter $E(S)$.

Exercice 7 Lire un diagramme en bâtons



La figure 2 représente la loi de probabilité d'une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{B}(10; 0,4)$: la hauteur du bâton d'abscisse k vaut $P(X = k)$.

- 7.1 Lire une valeur approchée de $P(X = 3)$ et de $P(X = 4)$, puis retrouver ces deux valeurs par le calcul (arrondis à 10^{-3}).
- 7.2 Quelle valeur de k est la plus probable ? Comparer avec $E(X)$.
- 7.3 Estimer graphiquement $P(X \leq 2)$, puis calculer cette probabilité à la calculatrice (arrondi à 10^{-3}).
- 7.4 Expliquer pourquoi la somme des hauteurs de tous les bâtons vaut 1.

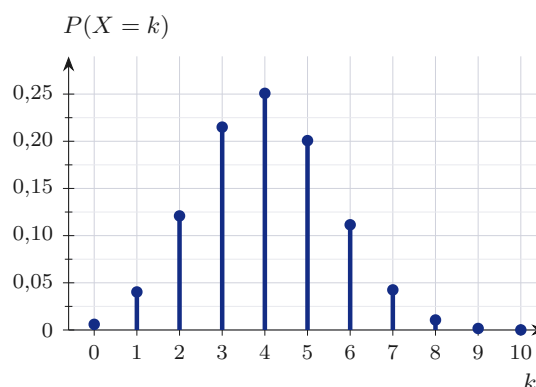


Figure 2 — La loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,4)$

Exercice 8 Un premier problème de seuil



Une loterie propose des tickets à gratter ; chaque ticket est gagnant avec la probabilité 0,02, indépendamment des autres. Un joueur achète n tickets et X compte les tickets gagnants.

- 8.1 Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 8.2 Le joueur achète 40 tickets : calculer la probabilité qu'il n'obtienne aucun ticket gagnant, puis celle qu'il en obtienne au moins un (arrondis à 10^{-3}).
- 8.3 Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $P(X \geq 1) = 1 - 0,98^n$. Résoudre l'inéquation $1 - 0,98^n \geq 0,9$ et en déduire le nombre minimal de tickets à acheter pour que la probabilité d'obtenir au moins un ticket gagnant atteigne 0,9.
- 8.4 Pour ce nombre de tickets, calculer le nombre moyen de tickets gagnants.

Exercice 9 Un lot de pièces



Une usine produit des pièces dont 3 % présentent un défaut. On prélève au hasard un lot de 20 pièces dans la production ; la production est assez importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise. On note X le nombre de pièces défectueuses du lot.

- 9.1 Justifier que X suit la loi $\mathcal{B}(20; 0,03)$: on précisera l'épreuve de Bernoulli répétée, le succès et les trois conditions du schéma de Bernoulli.
- 9.2 Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$ (arrondis à 10^{-4}), puis en déduire la probabilité que le lot contienne au moins deux pièces défectueuses.
- 9.3 Calculer le nombre moyen de pièces défectueuses par lot, ainsi que l'écart type de X (arrondi à 10^{-3}).

Exercice 10 Autour de l'espérance



La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(12; 0,5)$.

- 10.1 Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi à 10^{-3}), puis $P(X = 6)$ sous forme de fraction irréductible.
- 10.2 Justifier, sans calcul, que $P(X \leq 5) = P(X \geq 7)$. En déduire la valeur exacte de $P(X \leq 5)$.
- 10.3 Calculer $P(5 \leq X \leq 7)$, $P(4 \leq X \leq 8)$ et $P(3 \leq X \leq 9)$ (arrondis à 10^{-4}).
- 10.4 En déduire le plus petit entier h tel que $P(6 - h \leq X \leq 6 + h) \geq 0,95$, puis l'intervalle correspondant.