

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · PROBABILITÉS · CHAPITRE 16



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 1

Sommes de variables aléatoires

Les bases : loi d'une somme, linéarité de l'espérance, additivité de la variance, échantillon et moyenne

9 exercices · niveau ●○○ à ●●○ · durée conseillée : 2 h 15 · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Déterminer la loi de $X + Y$ par un tableau à double entrée ; calculer son espérance de deux façons.
- Utiliser $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, $E(aX + b) = aE(X) + b$, $V(aX + b) = a^2V(X)$ et, pour des variables indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
- Décomposer une variable en somme de variables simples ; exploiter un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ et interpréter la décroissance de $\sigma(M_n)$ en $1/\sqrt{n}$.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

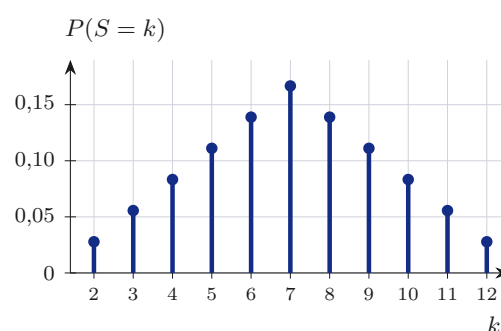
- **Somme de deux variables.** $X + Y$ est la variable qui à chaque issue ω associe $X(\omega) + Y(\omega)$. On obtient sa loi en croisant les valeurs de X et de Y dans un tableau à double entrée, puis en regroupant les cases de même somme.
- **Linéarité de l'espérance (toujours vraie) :** $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- **Variance.** $V(aX + b) = a^2V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$. Si X et Y sont indépendantes (par exemple issues d'une succession d'épreuves indépendantes), $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ et $\sigma(X + Y) = \sqrt{V(X) + V(Y)}$; de même pour n variables indépendantes.
- **Loi binomiale.** Si X suit $\mathcal{B}(n; p)$, alors $X = X_1 + \dots + X_n$ où les X_i sont indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p ($E(X_i) = p$, $V(X_i) = p(1 - p)$), d'où $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.
- **Échantillon de taille n** d'une loi d'espérance μ , de variance V , d'écart type σ : liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables indépendantes suivant cette loi. Avec $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $M_n = S_n/n$: $E(S_n) = n\mu$, $V(S_n) = nV$, $\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}$ et $E(M_n) = \mu$, $V(M_n) = \frac{V}{n}$, $\sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Exercice 1 La somme de deux dés

●○○

On lance un dé rouge et un dé bleu, tous deux équilibrés et à six faces numérotées de 1 à 6, de façon indépendante. On note R le numéro du dé rouge, B celui du dé bleu et $S = R + B$. La figure 1 représente la loi de S .

- 1.1 Construire un tableau à double entrée à 6 lignes et 6 colonnes donnant S pour chacune des 36 issues, équiprobables.
- 1.2 En déduire la loi de S (probabilités de dénominateur 36), vérifier que leur somme vaut 1 et comparer à la figure 1.
- 1.3 Calculer $E(S)$ à partir de cette loi, puis retrouver le résultat par la linéarité de l'espérance.
- 1.4 On admet que $V(R) = V(B) = \frac{35}{12}$. Justifier que $V(S) = \frac{35}{6}$, puis donner $\sigma(S)$ arrondi à 10^{-3} .
- 1.5 Calculer $P(S \geq 10)$ (fraction irréductible).

Figure 1 — La loi de $S = R + B$

Exercice 2 La facture de l'artisan

●○○

Un artisan facture un déplacement forfaitaire de 40 € auquel s'ajoutent 25 € par heure de travail. Le nombre X d'heures facturées pour une intervention a pour loi :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,2	0,4	0,3	0,1

- 2.1 Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- 2.2 On note C le montant en euros de la facture. Exprimer C en fonction de X , puis calculer $E(C)$, $V(C)$ et $\sigma(C)$ sans utiliser la loi de C . Interpréter $E(C)$.
- 2.3 L'artisan augmente son forfait de 10 €, le tarif horaire restant inchangé. De combien $E(C)$ augmente-t-elle ? Et $\sigma(C)$?

Exercice 3 Deux roues de loterie

●○○

Une fête foraine propose deux roues indépendantes. La roue A a 8 secteurs identiques : 4 portent 0 €, 3 portent 2 €, 1 porte 5 € ; la roue B a 4 secteurs identiques : 3 portent 1 €, 1 porte 3 €. Le joueur fait tourner les deux roues et empoche la somme des gains. On note X le gain de la roue A et Y celui de la roue B.

- 3.1 Donner la loi de X et celle de Y , puis calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
- 3.2 Dresser le tableau à double entrée des valeurs de $X + Y$ et des probabilités associées ; en déduire la loi de $X + Y$ (probabilités de dénominateur 32), représentée sur la figure 2.
- 3.3 Calculer $E(X + Y)$ à partir de cette loi, puis vérifier que $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- 3.4 Calculer $V(X)$ et $V(Y)$, en déduire $V(X + Y)$ puis $\sigma(X + Y)$ arrondi à 10^{-3} .
- 3.5 Le joueur paie 3 € par partie : son gain net est $G = X + Y - 3$. Calculer $E(G)$ et $\sigma(G)$. Le jeu est-il favorable au joueur ?

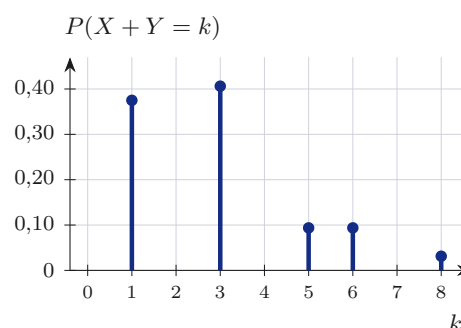


Figure 2 — La loi de $X + Y$ (à retrouver)

Exercice 4 Assembler deux composants

●○○

Un atelier assemble un composant de type A et un composant de type B, pris au hasard et indépendamment dans deux stocks distincts. Les masses, en grammes, vérifient $E(A) = 120$, $\sigma(A) = 3$, $E(B) = 80$ et $\sigma(B) = 4$.

- 4.1 Calculer $E(A + B)$, $V(A + B)$ puis $\sigma(A + B)$.
- 4.2 L'ensemble est glissé dans un sachet de masse constante 15 g : on note T la masse totale. Donner $E(T)$ et $\sigma(T)$, et justifier que l'écart type n'a pas changé.
- 4.3 On assemble maintenant deux composants de type A pris indépendamment, de masses A_1 et A_2 . Calculer $E(A_1 + A_2)$ et $\sigma(A_1 + A_2)$ (exact puis arrondi à 10^{-2}).
- 4.4 Calculer $E(2A)$ et $\sigma(2A)$. Expliquer pourquoi $A_1 + A_2$ et $2A$ ont la même espérance mais pas le même écart type.

Exercice 5 Un robot d'assemblage

●●○

Le temps, en minutes, mis par un robot pour assembler une pièce a pour espérance $\mu = 12$ et pour écart type $\sigma = 3$. Les temps des pièces successives étant indépendants et de même loi, $(X_1, \dots, X_n)$ est un échantillon de taille n ; on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $M_n = S_n/n$.

- 5.1 Pour $n = 4$, calculer $E(S_4)$, $V(S_4)$ et $\sigma(S_4)$, puis $E(M_4)$ et $\sigma(M_4)$.

5.2 Recopier et compléter le tableau suivant en donnant les valeurs exactes.

n	1	4	25	100	225
$\sigma(M_n)$	3				

5.3 Par quel nombre faut-il multiplier n pour diviser $\sigma(M_n)$ par 3 ?

5.4 Déterminer le plus petit entier n tel que $\sigma(M_n) \leq 0,25$.

5.5 Interpréter en une phrase : que devient le temps moyen observé sur n pièces lorsque n grandit ?

Exercice 6 La loi binomiale, somme de variables de Bernoulli



Un élève répond au hasard aux 20 questions d'un questionnaire, chacune proposant 4 réponses dont une seule est exacte ; les réponses sont indépendantes. Pour $1 \leq i \leq 20$, X_i vaut 1 si la i -ième réponse est exacte et 0 sinon, et $X = X_1 + \dots + X_{20}$.

6.1 Quelle loi suit X_i ? Donner $E(X_i)$ et $V(X_i)$.

6.2 Expliquer pourquoi X est le nombre de bonnes réponses de l'élève et préciser la loi de X .

6.3 En utilisant la linéarité de l'espérance, calculer $E(X)$. En utilisant l'additivité de la variance, calculer $V(X)$ puis $\sigma(X)$ (arrondi à 10^{-3}).

6.4 Vérifier que l'on retrouve les formules $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$, puis reprendre la question 6.3 pour 80 questions proposant chacune 20 réponses.

Exercice 7 Des gains cumulés



Dans un jeu en ligne, chaque partie rapporte 5 € avec la probabilité 0,2 et fait perdre 1 € avec la probabilité 0,8. Un joueur enchaîne 25 parties indépendantes ; G_i est le gain algébrique (en euros) de la i -ième partie et $G = G_1 + \dots + G_{25}$.

7.1 Donner la loi de G_1 , puis calculer $E(G_1)$, $V(G_1)$ et $\sigma(G_1)$.

7.2 Calculer $E(G)$, $V(G)$ et $\sigma(G)$. Le jeu est-il favorable au joueur ?

7.3 On note $M = G/25$ le gain moyen par partie : calculer $E(M)$ et $\sigma(M)$. Reprendre pour un joueur qui enchaîne 100 parties.

Exercice 8 Quand la variance ne s'additionne pas



On lance un dé équilibré à six faces et on note X le numéro obtenu. Comme deux faces opposées d'un dé portent des numéros de somme 7, le numéro de la face opposée est $Y = 7 - X$. On rappelle que $E(X) = \frac{7}{2}$ et $V(X) = \frac{35}{12}$.

8.1 Donner la loi de Y , puis $E(Y)$ et $V(Y)$. En déduire $E(X + Y)$ par linéarité.

8.2 Quelle valeur $X + Y$ prend-elle, quelle que soit l'issue ? En déduire $E(X + Y)$ et $V(X + Y)$.

8.3 Comparer $V(X + Y)$ et $V(X) + V(Y)$. Quelle hypothèse du cours n'est pas vérifiée ici ?

Exercice 9 Un échantillon d'une loi de Bernoulli



Dans une grande ville, 36 % des habitants utilisent les transports en commun au moins une fois par semaine. On en interroge n au hasard, de façon indépendante ; X_i vaut 1 si la i -ième personne est dans ce cas, 0 sinon, et $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $M_n = S_n/n$.

9.1 Donner $\mu = E(X_1)$, $V(X_1)$ et $\sigma(X_1)$.

9.2 Pour $n = 400$, préciser la loi de S_{400} , puis calculer $E(S_{400})$ et $\sigma(S_{400})$.

9.3 Que représente concrètement M_n ? Calculer $E(M_{400})$, $\sigma(M_{400})$ et $\sigma(M_{2500})$, puis déterminer le plus petit entier n tel que $\sigma(M_n) \leq 0,01$.