

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · PROBABILITÉS · CHAPITRE 16

Contrôle A

 Sommes de variables aléatoires

QCM, un jeu de plateau, un meuble en kit, la moyenne d'un échantillon

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

Toutes les variables aléatoires présentées comme indépendantes le sont : il n'y a donc pas lieu de le justifier, mais chaque fois qu'on utilise l'additivité de la variance, on précisera qu'elle repose sur cette indépendance. Les valeurs exactes sont attendues lorsque c'est possible (fractions irréductibles); les arrondis demandés seront indiqués. Les réponses du QCM ne demandent aucune justification. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●○○○

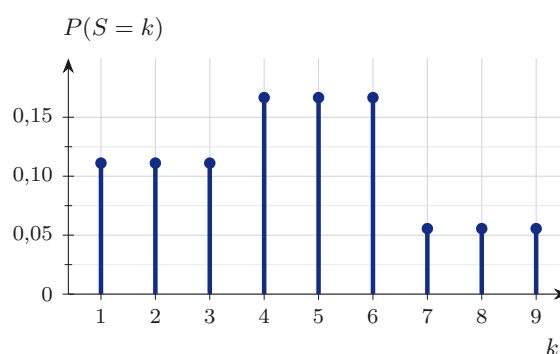
Pour chacune des cinq questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

- 1.1** Les variables aléatoires X et Y vérifient $E(X) = 4$ et $E(Y) = 6$. Alors $E(2X + 3Y)$ est égal à :
 a) 10 b) 20 c) 26 d) 30
- 1.2** Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et vérifient $V(X) = 2$ et $V(Y) = 5$. Alors $V(X + Y)$ est égal à :
 a) 3 b) $\sqrt{7}$ c) 7 d) 10
- 1.3** La variable aléatoire X a pour écart type $\sigma(X) = 2$. Alors $\sigma(3X - 1)$ est égal à :
 a) 5 b) 6 c) 11 d) 36
- 1.4** $(X_1, \dots, X_{100})$ est un échantillon de taille 100 d'une loi d'espérance 20 et d'écart type 5, et M_{100} en est la variable moyenne. Alors $\sigma(M_{100})$ est égal à :
 a) 0,05 b) 0,5 c) 5 d) 50
- 1.5** La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50; 0,2)$. Alors $V(X)$ est égal à :
 a) $2\sqrt{2}$ b) 8 c) 10 d) 40

Exercice 2 Un jeu de plateau

6 pts ●●○○

Dans un jeu de plateau, un tour se déroule ainsi : le joueur tire au hasard une carte parmi six cartes indiscernables au toucher, dont quatre portent la mention « rien » et deux la mention « avance de 3 cases », puis il lance un dé cubique équilibré numéroté de 1 à 6 et avance du nombre de cases indiqué par le dé. On note X le nombre de cases dû à la carte, D le numéro du dé et $S = X + D$ le nombre total de cases parcourues en un tour. La carte et le dé sont indépendants.

Figure 1 — La loi de S , à retrouver à la question 2.3

- 2.1** Donner la loi de X , puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.
- 2.2** On rappelle que $E(D) = \frac{7}{2}$ et $V(D) = \frac{35}{12}$. Calculer $E(S)$ et $V(S)$, puis $\sigma(S)$ arrondi à 10^{-3} .
- 2.3** Dresser le tableau à double entrée des couples $(X; D)$ et des probabilités associées, puis donner la loi de S (probabilités de dénominateur 18) et vérifier qu'elle correspond à la figure 1.
- 2.4** Retrouver $E(S)$ à partir de la loi obtenue à la question précédente.
- 2.5** Calculer $P(S \geq 7)$ et $P(4 \leq S \leq 6)$ sous forme de fractions irréductibles.
- 2.6** Une partie comporte 20 tours identiques et indépendants. On note A le nombre total de cases parcourues. Calculer $E(A)$ et $\sigma(A)$ (arrondi à 10^{-2}).

Exercice 3 Un meuble en kit

5 pts ●●○

Un meuble en kit se compose d'un plateau et de quatre pieds. La masse, en kilogrammes, d'un plateau a pour espérance 8 et pour écart type 0,4, celle d'un pied pour espérance 1,5 et pour écart type 0,15. Les masses A du plateau et B_1, B_2, B_3, B_4 des pieds sont indépendantes, les quatre dernières de même loi, et $T = A + B_1 + B_2 + B_3 + B_4$.

- 3.1** Calculer $E(T)$, puis $V(T)$ et $\sigma(T)$.
- 3.2** Un élève écrit $T = A + 4B_1$. Calculer $V(4B_1)$ et comparer à $V(B_1 + B_2 + B_3 + B_4)$; expliquer en une phrase pourquoi cette écriture est incorrecte.
- 3.3** Le fabricant ajoute dans chaque carton un sachet de visserie de masse constante 0,5 kg. Donner l'espérance et l'écart type de la masse du carton complet.
- 3.4** Le transport d'un carton est facturé 3 € par kilogramme, plus 5 € de frais fixes, la masse du sachet de visserie étant comprise. Calculer l'espérance et l'écart type du prix du transport d'un carton.
- 3.5** Un transporteur charge 30 cartons identiques et indépendants. Calculer l'espérance et l'écart type de la masse totale transportée (arrondi à 10^{-2}).

Exercice 4 À la caisse du magasin

4 pts ●●○

Le temps de passage en caisse d'un client, en minutes, a pour espérance $\mu = 8$ et pour écart type $\sigma = 4$. Les temps de clients différents étant indépendants et de même loi, $(X_1, \dots, X_n)$ est un échantillon de taille n ; on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $M_n = S_n/n$.

- 4.1** Une caissière reçoit 64 clients dans sa journée. Calculer $E(S_{64})$ et $\sigma(S_{64})$, puis interpréter $E(S_{64})$.
- 4.2** Calculer $E(M_{64})$ et $\sigma(M_{64})$.
- 4.3** Le directeur souhaite estimer le temps de passage moyen avec un écart type inférieur ou égal à 0,4 minute. Déterminer le nombre minimal de clients à observer.
- 4.4** Le directeur observe finalement 400 clients : calculer $\sigma(M_{400})$ et préciser par quel nombre $\sigma(M_{64})$ a été divisé.
- 4.5** Expliquer en une ou deux phrases pourquoi observer davantage de clients améliore la précision de cette estimation.