

Exercices 2

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Problèmes : cube et pyramide repérés, intersections de plans, systèmes 3×3 , trajectoire d'un drone, changement de base

8 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

repère orthonormé dans toute la feuille

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Choisir un repère adapté à un solide, traduire une configuration par des représentations paramétriques et des équations cartésiennes, puis conclure par le calcul (intersection, parallélisme, orthogonalité, distance).
- Résoudre un système linéaire de trois équations à trois inconnues et interpréter géométriquement les trois cas possibles ; travailler dans une base non orthonormée.

► MÉTHODE — Chercher un vecteur normal à un plan défini par trois points

Si $\mathcal{P}$ passe par A, B, C non alignés, on cherche $\vec{n}(a; b; c)$ tel que $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$: ce système de deux équations à trois inconnues permet d'exprimer deux inconnues en fonction de la troisième, à laquelle on donne une valeur commode. On reporte enfin A dans $ax + by + cz + d = 0$ pour obtenir d .

Exercice 1 Un cube repéré

●●○

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 6 (figure 1). L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \frac{1}{6}\vec{AB}, \frac{1}{6}\vec{AD}, \frac{1}{6}\vec{AE})$.

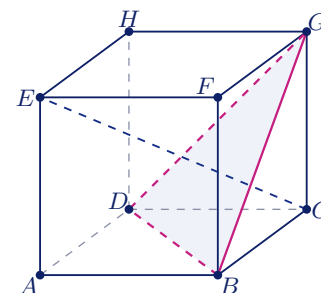


Figure 1 — Le cube et le plan (BDG)

- 1.1 Donner les coordonnées des huit sommets du cube.
- 1.2 Démontrer que $\vec{n}(1; 1; -1)$ est un vecteur normal au plan (BDG) , puis déterminer une équation cartésienne de ce plan.
- 1.3 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CF) , puis les coordonnées de son point d'intersection avec le plan (BDG) . Que représente ce point pour la face $BCGF$?
- 1.4 Démontrer que la droite (CE) est orthogonale au plan (BDG) .
- 1.5 En déduire les coordonnées du projeté orthogonal K de E sur le plan (BDG) , puis la distance exacte du point E à ce plan.
- 1.6 Déterminer de même la distance du point C au plan (BDG) , puis vérifier que la somme des deux distances obtenues est égale à CE .
- 1.7 Démontrer que le triangle BDG est équilatéral, calculer son aire exacte, puis le volume du tétraèdre $EBDG$.

Exercice 2 L'intersection de deux plans

●●○

On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations cartésiennes respectives $x + y + z - 3 = 0$ et $x - y = 0$.

- 2.1 Donner un vecteur normal à chacun des deux plans et démontrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants.
- 2.2 Résoudre le système formé par les deux équations en posant $x = t$, puis en déduire une représentation paramétrique de la droite $\Delta = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

- 2.3** Vérifier que le vecteur directeur obtenu est bien orthogonal aux deux vecteurs normaux. Pourquoi était-ce prévisible ?
- 2.4** Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Δ et du plan (xOy) .
- 2.5** Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{R}$ contenant Δ et passant par le point $A(1; 0; 0)$. Vérifier que $A \notin \Delta$ au préalable.

Exercice 3 Trois plans : les trois situations

●●○

On considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations $x + y - z = 2$ et $x - y + z = 0$, ainsi que les trois plans

$$\mathcal{R}_1 : 3x + y - z = 4, \quad \mathcal{R}_2 : 3x + y - z = 5, \quad \mathcal{R}_3 : x + y + z = 4.$$

- 3.1** Résoudre le système formé par les équations de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et en déduire une représentation paramétrique de la droite $\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.
- 3.2** Résoudre le système formé par les équations de $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{R}_1$. Interpréter géométriquement le résultat.
- 3.3** Même question avec $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{R}_2$. On pourra remarquer que le vecteur normal $(3; 1; -1)$ lu sur l'équation de $\mathcal{R}_2$ s'écrit $2\vec{n}_1 + \vec{n}_2$, où $\vec{n}_1(1; 1; -1)$ et $\vec{n}_2(1; -1; 1)$ sont les vecteurs normaux lus sur les équations de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
- 3.4** Même question avec $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{R}_3$.
- 3.5** Récapituler les trois natures possibles de l'intersection de trois plans de l'espace deux à deux distincts.

Exercice 4 Le drone et le toit du hangar

●●○

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'unité 1 m. Le toit d'un hangar est le rectangle $RSTU$ avec

$$R(0; 0; 3), \quad S(12; 0; 3), \quad T(12; 12; 12), \quad U(0; 12; 12).$$

Un drone se déplace en ligne droite : à l'instant t (en secondes, $t \geq 0$) il occupe le point $M(t)$ de coordonnées $(2 + t; 2 + 3t; 17 - 4t)$ (figure 2).

- 4.1** Vérifier que $\vec{n}(0; 3; -4)$ est un vecteur normal au plan (RST) , puis démontrer qu'une équation cartésienne de ce plan est $3y - 4z + 12 = 0$.
- 4.2** Donner un vecteur directeur de la trajectoire du drone et sa position P à l'instant $t = 0$.
- 4.3** Démontrer que le drone atteint le plan du toit à l'instant $t = 2$ et déterminer les coordonnées du point d'impact I . Vérifier que I appartient bien au rectangle $RSTU$.
- 4.4** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point P sur le plan du toit, puis la distance du point P à ce plan.
- 4.5** Calculer la longueur PI (valeur exacte puis arrondie au décimètre) et comparer à PH . Quelle propriété retrouve-t-on ?
- 4.6** Déterminer l'instant, antérieur à l'impact, auquel le drone se trouve à 5 m du plan du toit, ainsi que ses coordonnées à cet instant.

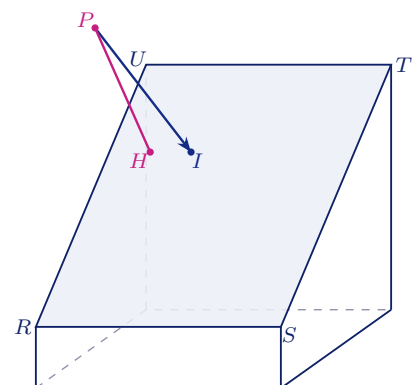


Figure 2 — Le toit $RSTU$ et la trajectoire du drone

Exercice 5 Changer de base

●●○

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}(1; 1; 0)$, $\vec{v}(0; 1; 1)$ et $\vec{w}(1; 0; 1)$.

- 5.1** Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, puis qu'il n'existe aucun couple de réels $(x; y)$ tel que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Conclure que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
- 5.2** Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{a}(3; 1; 2)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

- 5.3** Déterminer de même les coordonnées de $\vec{b}(2; 5; 3)$: que peut-on en déduire pour $\vec{b}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$?
- 5.4** Démontrer que $\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v} + \vec{w})$, puis exprimer de même $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
- 5.5** Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u} + \vec{v}$ forment-ils une base de l'espace ? Justifier.

Exercice 6 Une pyramide repérée



$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un carré de côté 6 ; S est situé à la verticale du centre O de la base, à la hauteur 4 (figure 3). L'espace est muni d'un repère orthonormé dans lequel $A(0; 0; 0)$, $B(6; 0; 0)$, $C(6; 6; 0)$ et $D(0; 6; 0)$.

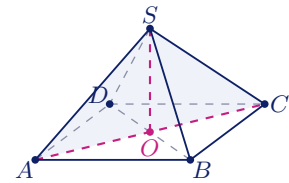


Figure 3 — La pyramide $SABCD$

- 6.1** Donner les coordonnées de O et de S , puis une représentation paramétrique de la droite (SO) .
- 6.2** Déterminer une équation cartésienne du plan (SAC) , puis du plan (SBD) .
- 6.3** Démontrer que ces deux plans sont perpendiculaires, puis que leur intersection est la droite (SO) .
- 6.4** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point B sur le plan (SAC) , puis la distance exacte du point B à ce plan.
- 6.5** Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (SAB) est $4y - 3z = 0$, puis que la droite (CD) est strictement parallèle à ce plan.
- 6.6** Calculer le volume de la pyramide et l'aire du triangle SAB . En déduire la distance du point D au plan (SAB) .

Exercice 7 Le plan contenant deux droites



On considère les droites

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 1 - s \\ z = 1 + 3s \end{cases} \quad d_3 : \begin{cases} x = 2 + 4k \\ y = 3 + 2k \\ z = -2k \end{cases} \quad d_4 : \begin{cases} x = p \\ y = p \\ z = p \end{cases}$$

où t , s , k et p décrivent $\mathbb{R}$.

- 7.1** Démontrer que d_1 et d_2 sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
- 7.2** En déduire qu'elles définissent un plan $\mathcal{P}$, dont on déterminera une équation cartésienne.
- 7.3** Démontrer que d_1 et d_3 sont strictement parallèles, puis déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ qui les contient.
- 7.4** Démontrer que d_1 et d_4 ne sont pas coplanaires.
- 7.5** Sans nouveau calcul, que peut-on dire de l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$? Le vérifier en résolvant le système formé par leurs deux équations.

Exercice 8 Alignement, coplanarité, volume



On considère les points $A(1; 2; 0)$, $B(3; 1; 0)$, $C(1; 3; -1)$ et $D(2; 3; 3)$.

- 8.1** Démontrer que A , B et C ne sont pas alignés, puis qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + 2y + 2z - 5 = 0$. En déduire que A , B , C et D ne sont pas coplanaires.
- 8.2** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de D sur le plan (ABC) , puis la distance du point D à ce plan.
- 8.3** Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, AB et AC , puis l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre $ABCD$.
- 8.4** Déterminer une équation du plan passant par D et parallèle à (ABC) , puis la distance entre ces deux plans.