

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 1

# Exercices 2 Raisonnement par récurrence

Problèmes : modéliser, conjecturer, démontrer

6 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée



R. RINGUET · 2026 – 2027

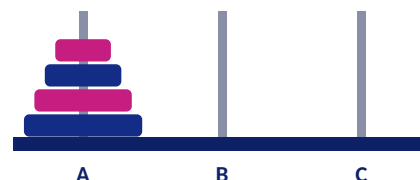
## ★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Modéliser une situation par une suite définie par récurrence; conjecturer (calculatrice, Python, graphique).
- Démontrer par récurrence le résultat conjecturé, puis l'exploiter pour répondre au problème posé.

## Exercice 1 Les tours de Hanoï

●●○

Le jeu est constitué de trois piquets A, B, C et de  $n$  disques de diamètres tous différents, empilés sur le piquet A du plus grand au plus petit. Le but est de transporter la tour sur le piquet C en respectant deux règles : on ne déplace qu'un disque à la fois; on ne pose jamais un disque sur un disque plus petit.

Figure 1 — Position de départ pour  $n = 4$ 

On note  $u_n$  le nombre minimal de déplacements nécessaires pour transporter une tour de  $n$  disques ( $n \geq 1$ ).

- 1.1 Justifier que  $u_1 = 1$  et que  $u_2 = 3$ .
- 1.2 On admet que, pour transporter  $n + 1$  disques, la meilleure stratégie consiste à transporter les  $n$  disques supérieurs sur B, puis le plus grand disque sur C, puis les  $n$  disques de B sur C. En déduire que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = 2u_n + 1$ .
- 1.3 Calculer  $u_3$ ,  $u_4$  et  $u_5$ , conjecturer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ , puis la démontrer par récurrence.
- 1.4 Selon une légende, des moines transportent une tour de 64 disques à raison d'un déplacement par seconde. Exprimer cette durée en milliards d'années; comparer à l'âge de l'Univers (13,8 milliards d'années).

## Exercice 2 Une pyramide d'oranges

●●○

Un primeur empile des oranges en pyramide à base carrée : l'étage du haut contient 1 orange, l'étage du dessous  $2^2 = 4$  oranges, le suivant  $3^2 = 9$  oranges, et ainsi de suite (figure 2). Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $T_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$  le nombre d'oranges d'une pyramide de  $n$  étages.

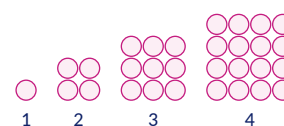


Figure 2 — Étages 1 à 4 vus de dessus

- 2.1 Calculer  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$ .
- 2.2 Démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .
- 2.3 Le primeur dispose de 400 oranges. Combien d'étages complets sa pyramide peut-elle compter au maximum ? Combien d'oranges restent alors inutilisées ?

## Exercice 3 Comparer deux algorithmes

●●○

Pour traiter une liste de  $n$  données, un algorithme A effectue  $n^2$  opérations élémentaires et un algorithme B en effectue  $2^n$ .

- 3.1 Calculer  $n^2$  et  $2^n$  pour les entiers  $n$  de 1 à 6. Pour quelles valeurs de  $n$  a-t-on  $2^n < n^2$  ?

- 3.2** Montrer que, pour tout entier  $n \geq 3$ ,  $2n^2 \geq (n+1)^2$ . Aide : étudier le signe de  $n^2 - 2n - 1$ .
- 3.3** Démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 4$ ,  $2^n \geq n^2$ .
- 3.4** L'hérédité établie à la question précédente est en fait valable dès le rang 3. Peut-on en conclure que l'inégalité  $2^n \geq n^2$  est vraie pour tout entier  $n \geq 3$ ? Expliquer.
- 3.5** Un ordinateur effectue  $10^9$  opérations par seconde. Pour  $n = 100$  données, calculer la durée du traitement avec l'algorithme A (en secondes), puis avec l'algorithme B (en années). Commenter.

#### Exercice 4 Les abonnés d'une salle d'escalade



Une salle d'escalade comptait 1 500 abonnés en 2026. On estime que, chaque année, 20 % des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement et que 600 nouvelles personnes s'abonnent. On modélise le nombre d'abonnés en  $2026 + n$  par le terme  $u_n$  d'une suite ; ainsi  $u_0 = 1\,500$ .

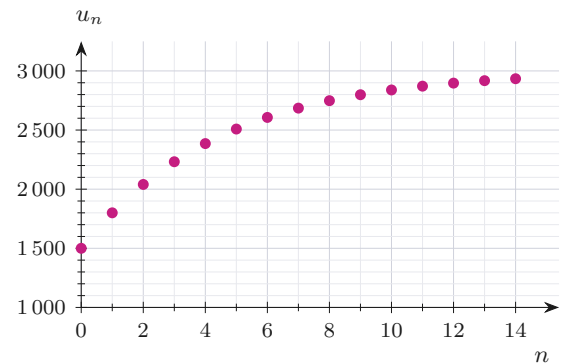


Figure 3 — Points de coordonnées  $(n; u_n)$

- 4.1** Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,8u_n + 600$ .
- 4.2** La figure 3 représente les premiers termes de la suite. Conjecturer le sens de variation de  $(u_n)$  et un majorant de cette suite.
- 4.3** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1} \leq 3\,000$ . Interpréter ce résultat.
- 4.4** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 3\,000 - 1\,500 \times 0,8^n$ .
- 4.5** Le gérant agrandira la salle dès que le nombre d'abonnés dépassera 2 900. En quelle année, selon ce modèle ?

#### Exercice 5 Conjecturer avec Python



On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_1 = \frac{1}{2}$  et, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ .

La fonction Python suite ci-contre renvoie une valeur approchée du terme  $u_n$ .

```
1 def suite(n):
2     u = 1/2
3     for k in range(1, n):
4         u = u + 1/((k+1)*(k+2))
5     return u
```

- 5.1** Vérifier à la main que l'appel suite(3) renvoie 0,75.
- 5.2** Pour  $n$  allant de 1 à 6, les appels suite( $n$ ) renvoient, à  $10^{-4}$  près : 0,5 ; 0,6667 ; 0,75 ; 0,8 ; 0,8333 ; 0,8571. Écrire ces valeurs sous forme de fractions irréductibles, puis conjecturer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- 5.3** Démontrer cette conjecture par récurrence.
- 5.4** En déduire que tous les termes de la suite sont strictement inférieurs à 1, puis déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n \geq 0,99$ .

#### Exercice 6 Intérêts simples ou intérêts composés ?



On place 2 000 euros. Avec la formule S (intérêts simples), le capital augmente chaque année de 4 % du capital initial, soit de 80 euros. Avec la formule C (intérêts composés), le capital augmente chaque année de 4 %. On note  $s_n$  et  $c_n$  les capitaux, en euros, obtenus au bout de  $n$  années avec les formules S et C ; ainsi  $s_0 = c_0 = 2\,000$ .

- 6.1** Préciser la nature des suites  $(s_n)$  et  $(c_n)$ , puis exprimer  $s_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ .
- 6.2** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $c_n \geq s_n$  (on pourra remarquer que  $s_n \geq 2\,000$ ). Quelle inégalité du cours, portant sur  $(1+a)^n$ , retrouve-t-on ainsi dans le cas  $a = 0,04$  ?
- 6.3** Justifier sans calculatrice qu'avec la formule C le capital a au moins doublé au bout de 25 ans. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'années il a réellement doublé. Commenter.