

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 1

Contrôle B Raisonnement par récurrence

Vrai ou faux, somme des cubes, modèle de propagation, régions du plan

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

Dans toute démonstration par récurrence, la propriété $P(n)$ doit être clairement énoncée et les trois étapes (initialisation, hérédité, conclusion) doivent apparaître. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

4 pts ●●○

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et **justifier** la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. On rappelle qu'un entier a est divisible par 6 lorsqu'il existe un entier k tel que $a = 6k$.

- 1.1** Soit $P(n)$ une propriété héréditaire à partir du rang 0. **Affirmation** : « si $P(4)$ est fausse, alors $P(3)$ est fausse ».
- 1.2** Pour tout entier naturel n , on note $Q(n)$ la propriété : « $7^n + 1$ est divisible par 6 ». **Affirmation** : « si $Q(n)$ est vraie pour un entier naturel n , alors $Q(n+1)$ est vraie ».
- 1.3** **Affirmation** : « la propriété $Q(n)$ de la question précédente est vraie pour tout entier naturel n ».
- 1.4** **Affirmation** : « il existe un entier naturel n tel que $1,002^n \geq 500$ ». On pourra utiliser l'inégalité de Bernoulli : pour tout réel $a > 0$ et tout entier naturel n , $(1+a)^n \geq 1+na$.

Exercice 2 La somme des cubes

5 pts ●●○

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = 1 + 2 + \dots + n$ et $C_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

- 2.1** Recopier et compléter le tableau ci-dessous, puis conjecturer une relation entre C_n et S_n .

n	1	2	3	4	5
S_n	1	3			
C_n	1	9			

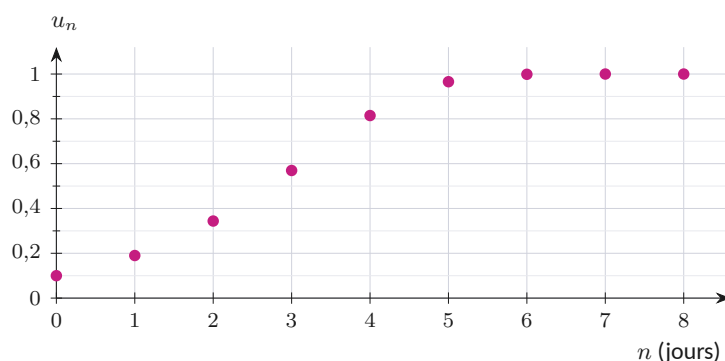
- 2.2** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $C_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
- 2.3** Rappeler l'expression de S_n en fonction de n , puis conclure quant à la conjecture de la question 2.1.
- 2.4** Calculer la somme $11^3 + 12^3 + \dots + 20^3$.

Exercice 3 La propagation d'une rumeur

6 pts ●●●

Une rumeur se propage dans un lycée. On note u_n la proportion d'élèves informés au bout de n jours ; au départ, 10 % des élèves sont informés, donc $u_0 = 0,1$. On modélise la propagation par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$. On note f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 2x - x^2$.

- 3.1** Calculer u_1 et u_2 . Vérifier la cohérence de ces résultats avec la figure 1 (page 2).
- 3.2** Étudier le sens de variation de f sur $[0; 1]$, puis calculer $f(0)$ et $f(1)$.
- 3.3** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. Interpréter ce résultat.

Figure 1 — Proportion d'élèves informés selon le modèle : points de coordonnées $(n ; u_n)$

- 3.4** Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = 1 - u_n$: c'est la proportion d'élèves non informés. Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n^2$.
- 3.5** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $v_n = 0,9^{(2^n)}$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- 3.6** Au bout de combien de jours plus de 99 % des élèves sont-ils informés ?
- 3.7** Écrire une fonction Python rumeur(n) qui renvoie u_n en utilisant uniquement la relation de récurrence.

Exercice 4 Partager le plan avec des droites

5 pts ●●●

On trace n droites du plan ($n \geq 1$) de sorte que deux droites quelconques soient toujours sécantes et que trois droites quelconques ne passent jamais par un même point. On note r_n le nombre de régions du plan délimitées par ces n droites. La figure 2 illustre les cas $n = 1$ à $n = 4$; les régions sont numérotées dans les trois premiers cas.

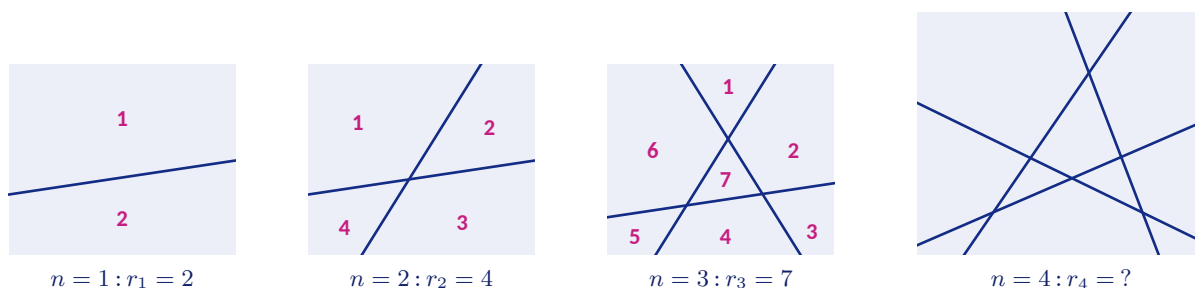


Figure 2 — Régions du plan délimitées par une, deux, trois ou quatre droites

- 4.1** On suppose n droites déjà tracées et on en trace une nouvelle. Justifier qu'elle est coupée par les n premières droites en $n + 1$ morceaux, et que chaque morceau partage une région existante en deux. En déduire que $r_{n+1} = r_n + n + 1$.
- 4.2** Calculer r_4 à l'aide de cette relation, puis contrôler le résultat en comptant les régions sur la figure 2. Calculer r_5 .
- 4.3** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $r_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$.
- 4.4** Combien de droites faut-il tracer, au minimum, pour partager le plan en plus de 100 régions ?