

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 1



R. RINGUET · 2026 – 2027

# Contrôle A Raisonnement par récurrence

Inégalité de Bernoulli, formule explicite, encadrement d'une suite, modélisation

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : ..... Prénom : ..... Classe : ..... Note : /20

## ★ CONSIGNES

Dans toute démonstration par récurrence, la propriété  $P(n)$  doit être clairement énoncée et les trois étapes (initialisation, hérédité, conclusion) doivent apparaître. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

### Exercice 1 Questions de cours

5 pts ●○○

- 1.1** Recopier et compléter la phrase suivante. « Pour démontrer par récurrence qu'une propriété  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ , on démontre d'abord que ..... (initialisation), puis que, pour tout entier naturel  $n$ , si ..... alors ..... (hérédité). »
- 1.2** Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $P(n)$  la propriété : «  $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$  ». Écrire  $P(0)$ , puis  $P(n+1)$ .
- 1.3** **Démonstration de cours.** Soit  $a$  un réel strictement positif. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $(1+a)^n \geq 1+na$  (inégalité de Bernoulli).
- 1.4** En déduire, sans calculatrice, que  $1,02^{50} \geq 2$ .
- 1.5** Vrai ou faux ? « Si une propriété est héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ . » Justifier à l'aide de la propriété  $Q(n)$  : «  $2^n$  est un multiple de 3 ».

### Exercice 2 Une formule explicite

5 pts ●○○

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 4$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 3u_n - 4$ .

- 2.1** Recopier et compléter les lignes 2 et 4 de la fonction Python ci-contre pour que l'appel `suite(n)` renvoie le terme  $u_n$ .
- 2.2** Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ . La suite  $(u_n)$  est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
- 2.3** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 2 \times 3^n + 2$ .
- 2.4** Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = 4 \times 3^n$ . En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

```
1 def suite(n):
2     u = ...
3     for k in range(n):
4         u = ...
5     return u
```

**Exercice 3 Une suite définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$** 

6 pts ●●●○

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$ . On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

**3.1** Montrer que, pour tout réel  $x \geq 0$ ,  $f'(x) = \frac{5}{(x+4)^2}$ .

En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .

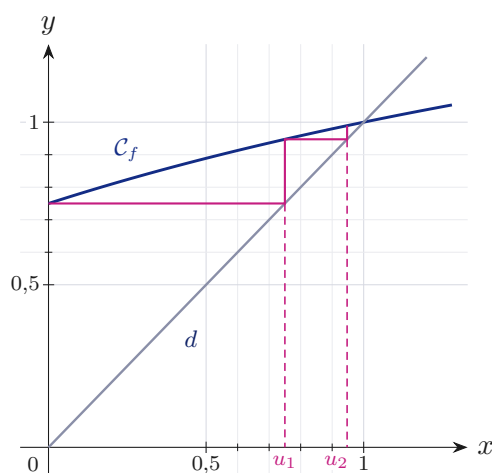
**3.2** Calculer  $u_1$  et  $u_2$  sous forme de fractions irréductibles.

**3.3** Sur la figure 1, on a tracé la courbe  $\mathcal{C}_f$ , la droite  $d$  d'équation  $y = x$  et construit les termes  $u_1$  et  $u_2$  sur l'axe des abscisses. La calculatrice donne par ailleurs, à  $10^{-4}$  près :  $u_3 \approx 0,9894$ ,  $u_4 \approx 0,9979$  et  $u_5 \approx 0,9996$ .

Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation de la suite  $(u_n)$  et sur un majorant de cette suite ?

**3.4** Calculer  $f(1)$ , puis démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ .

**3.5** Les conjectures de la question 3.3 sont-elles ainsi démontrées ? Justifier.

Figure 1 — Courbe  $\mathcal{C}_f$  et droite  $d$  d'équation  $y = x$ **Exercice 4 Un château de cartes**

4 pts ●●●○

On construit des châteaux de cartes sur le modèle de la figure 2. On note  $u_n$  le nombre de cartes nécessaires pour construire un château de  $n$  étages ( $n \geq 1$ ). Ainsi  $u_1 = 2$  et  $u_2 = 7$ .

**4.1** Déterminer  $u_3$  à l'aide de la figure 2.

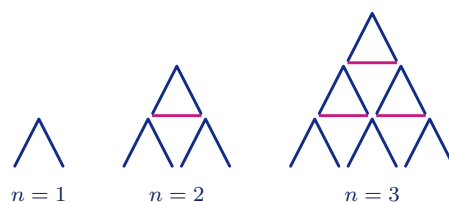


Figure 2 — Châteaux de 1, 2 et 3 étages

**4.2** Pour passer d'un château de  $n$  étages à un château de  $n+1$  étages, on construit un nouvel étage à la base. Expliquer pourquoi, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = u_n + 3n + 2$ .

**4.3** Démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_n = \frac{n(3n+1)}{2}$ .

**4.4** On dispose de deux jeux de 52 cartes. Combien d'étages le château peut-il compter au maximum ?