

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 9



R. RINGUET · 2026 - 2027

Fiche de cours Primitives et équations différentielles

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 PRIMITIVES D'UNE FONCTION

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une **primitive** de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$ sur I . Chercher les primitives de f , c'est résoudre l'équation différentielle $y' = f$.

Propriété — admis. Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I .

Théorème. Si F est une primitive de f sur I , alors les primitives de f sur I sont exactement les fonctions $x \mapsto F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$: **deux primitives diffèrent d'une constante**.

Remarque. Idée de la démonstration (exigible) : si F et G sont deux primitives de f , alors $(G - F)' = f - f = 0$ sur l'intervalle I , donc $G - F$ est constante.

Propriété. Pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ donnés, il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$: la constante k est déterminée par cette condition.

■ FORMULAIRE — primitives des fonctions de référence et des formes usuelles

- $x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$; sur $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ si $n \leq -2$); $\frac{1}{x} \rightarrow \ln x$ et $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 2\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$;
 $e^x \rightarrow e^x$; $\cos \rightarrow \sin$; $\sin \rightarrow -\cos$.
- Formes usuelles (u dérivable sur I): $u'e^u \rightarrow e^u$; $u'u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$; u ne s'annulant pas si $n \leq -2$);
 $\frac{u'}{u} \rightarrow \ln u$ (si $u > 0$); $\frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u}$ (si $u > 0$); $\frac{u'}{u^2} \rightarrow -\frac{1}{u}$ (si u ne s'annule pas).
- Cas général : $(v' \circ u) \times u' \rightarrow v \circ u$. La linéarité s'applique : une primitive de $\alpha f + \beta g$ est $\alpha F + \beta G$.

Méthode — calculer une primitive. Reconnaître d'abord la **forme** ($u'e^u$, $\frac{u'}{u}$...) en identifiant u , puis ajuster le coefficient : si le facteur u' manque d'une constante, on multiplie la primitive par l'inverse de cette constante. Toujours vérifier en dérivant.

2 L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y' = ay$

Théorème. Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto C e^{ax}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Remarque. Idée de la démonstration (exigible) : si f est solution, on pose $g(x) = f(x)e^{-ax}$; alors $g'(x) = f'(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = 0$, donc g est constante, égale à C , et $f(x) = C e^{ax}$.

Propriété. Pour x_0 et y_0 donnés, il existe une unique solution vérifiant $y(x_0) = y_0$: la **condition initiale** détermine C .

3 L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y' = ay + b$

Théorème. Soit $a \neq 0$ et b deux réels. La fonction constante égale à $-\frac{b}{a}$ est une solution particulière de $y' = ay + b$, et les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \mapsto C e^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Méthode — résolution. Déterminer la solution constante en résolvant $0 = ac + b$, ajouter les solutions de $y' = ay$, puis utiliser la condition initiale pour trouver C .

Propriété. Si $a < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (C e^{ax} - \frac{b}{a}) = -\frac{b}{a}$: toutes les courbes solutions admettent la même asymptote horizontale $y = -\frac{b}{a}$.

Méthode — équation $y' = ay + f$ avec une solution particulière u donnée. Une fonction dérivable g est solution si et seulement si $g - u$ est solution de $y' = ay$. Les solutions sont donc les $x \mapsto u(x) + C e^{ax}$.

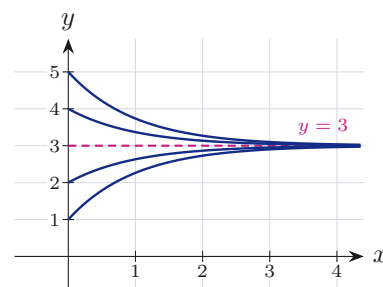


Figure 1 — Quatre solutions de $y' = -y + 3$: elles se rapprochent toutes de la solution constante $y = 3$.

4 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Vérifier qu'une fonction F est une primitive de f sur I , et en déduire toutes les primitives.
- Calculer une primitive d'une fonction de référence ou d'une forme usuelle, en ajustant les coefficients.
- Déterminer la primitive vérifiant une condition $F(x_0) = y_0$.
- Résoudre $y' = ay$ et $y' = ay + b$, avec ou sans condition initiale.
- Reconnaître une équation $y' = ay + f$ et conclure à partir d'une solution particulière fournie.
- Modéliser une situation (désintégration radioactive, refroidissement, charge d'un condensateur, évolution d'une population) par une équation différentielle, puis l'exploiter.

5 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — primitive d'une forme usuelle

$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$. On reconnaît $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$ et $u'(x) = 2x$: il manque le facteur 2, donc $f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$ et $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$. Vérification : $F'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2 + 1} = f(x)$.

★ EXEMPLE — primitive vérifiant une condition

$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(1) = 2$. Les primitives sont $F(x) = x^3 - 2x^2 + x + k$. Or $F(1) = 1 - 2 + 1 + k = k$, donc $k = 2$ et $F(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$.

★ EXEMPLE — équation avec condition initiale

Résoudre $y' = -2y + 10$ avec $y(0) = 2$. La solution constante vérifie $0 = -2c + 10$, soit $c = 5$. Les solutions sont $y(x) = C e^{-2x} + 5$. La condition donne $C + 5 = 2$, soit $C = -3$: $y(x) = 5 - 3e^{-2x}$, de limite 5 en $+\infty$.

★ EXEMPLE — modélisation : décroissance radioactive

Le nombre de noyaux vérifie $N'(t) = -\lambda N(t)$ avec $\lambda > 0$, donc $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ où $N_0 = N(0)$. La demi-vie $t_{1/2}$ vérifie $N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$, c'est-à-dire $e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}$, d'où $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$.

★ EXEMPLE — méthode d'Euler

Elle approche une solution pas à pas à l'aide de $y(x+h) \approx y(x) + h y'(x)$. Pour $y' = -y + 3$ avec $y(0) = 1$ et un pas $h = 0,1$: $y(0,1) \approx 1 + 0,1 \times (-1 + 3) = 1,2$, puis $y(0,2) \approx 1,2 + 0,1 \times (-1,2 + 3) = 1,38$. La solution exacte $y(x) = 3 - 2e^{-x}$ donne 1,190 puis 1,363.

✖ PIÈGES

- Une primitive n'est jamais unique : ne pas oublier la constante $+k$, ni l'intervalle sur lequel on travaille.
- Vérifier le facteur u' avant d'appliquer une forme usuelle : une primitive de e^{3x} est $\frac{1}{3}e^{3x}$, pas e^{3x} .
- $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln u$ *seulement* là où $u > 0$.
- Dans $y' = ay + b$, la solution particulière est $-\frac{b}{a}$, pas $\frac{b}{a}$: la retrouver en résolvant $ac + b = 0$.
- La condition initiale s'applique à la solution *générale* déjà écrite : d'abord $Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, ensuite le calcul de C .