

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 9



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 2 Primitives et équations différentielles

Problèmes : refroidissement, circuit RC, médicament, population, méthode d'Euler

7 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Traduire une situation concrète par une équation différentielle $y' = ay$ ou $y' = ay + b$, la résoudre avec sa condition initiale, puis exploiter la solution (variations, limite, seuil, retour au contexte).
- Utiliser une primitive pour reconstituer une grandeur à partir de sa vitesse de variation ; mettre en œuvre la méthode d'Euler et en discuter la précision ; lire un champ de tangentes.

► MÉTHODE — Passer d'une équation « avec écart » à une équation $y' = ay$

Beaucoup de modèles s'écrivent $y' = -k(y - \ell)$, où ℓ est une valeur d'équilibre. On pose alors $f(t) = y(t) - \ell$: comme ℓ est constante, $f' = y' = -kf$, donc $f(t) = Ce^{-kt}$ et $y(t) = \ell + Ce^{-kt}$. C'est exactement la résolution de $y' = ay + b$ avec $a = -k$ et $\ell = -\frac{b}{a}$.

Exercice 1 Le refroidissement d'un café

●●○

D'après la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à l'écart entre sa température et celle du milieu ambiant. Une tasse de café à 80°C est posée dans une pièce maintenue à 20°C . On note $\theta(t)$ la température du café, en degrés Celsius, t minutes après avoir été servi : $\theta'(t) = -k(\theta(t) - 20)$, où $k > 0$.

- 1.1 On pose $f(t) = \theta(t) - 20$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = -ky$, puis exprimer $\theta(t)$ en fonction de k et de t .
- 1.2 Au bout de 10 min, le café est à 50°C . Démontrer que $k = \frac{\ln 2}{10}$, puis donner sa valeur arrondie à 10^{-4} , avec son unité.
- 1.3 Justifier que θ est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t)$ et interpréter ce résultat.
- 1.4 Calculer la température du café au bout de 25 min (arrondir à 10^{-1}).
- 1.5 On estime que le café devient trop tiède pour être apprécié lorsque sa température descend à 37°C . Déterminer, par le calcul, la valeur exacte puis l'arrondi à 10^{-1} de l'instant correspondant.

Exercice 2 Une perfusion

●●○

Un patient reçoit un médicament par perfusion, à débit constant de $60 \text{ mg} \cdot \text{h}^{-1}$. Son organisme en élimine chaque heure une quantité proportionnelle à celle qui est présente dans le sang, de coefficient 0,20. La quantité $q(t)$ de médicament présente dans le sang, en milligrammes, t heures après le début de la perfusion, vérifie donc

$$q'(t) = -0,20 q(t) + 60, \quad q(0) = 0.$$

- 2.1 Donner la solution constante de cette équation différentielle, puis déterminer l'expression de $q(t)$.
- 2.2 Étudier les variations de q sur $[0; +\infty[$ et déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t)$. Interpréter ce résultat dans le contexte : on parle de *palier* de la perfusion.
- 2.3 Le médicament devient efficace lorsque la quantité présente atteint 150 mg. Déterminer la valeur exacte puis l'arrondi à 10^{-2} de l'instant correspondant.

- 2.4** Déterminer, par le calcul, au bout de combien d'heures la quantité présente atteint 95 % du palier (arrondir à 10^{-1}).
- 2.5** Pour un autre patient, le médecin souhaite un palier de 400 mg, le coefficient d'élimination restant égal à 0,20. Quel débit de perfusion faut-il régler ?

Exercice 3 La charge d'un condensateur



Le circuit de la figure 1 associe en série une source idéale de tension $E = 6,0 \text{ V}$, un conducteur ohmique de résistance $R = 2,0 \text{ k}\Omega$ et un condensateur de capacité $C = 1,0 \text{ mF}$, initialement déchargé. À l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur. La loi des mailles donne alors, pour la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur exprimée en volts et t en secondes :

$$RC u'(t) + u(t) = E.$$

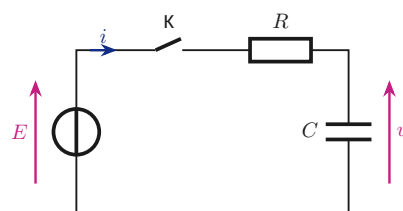


Figure 1 — Circuit de charge (convention récepteur)

- 3.1** Calculer RC et en déduire que u est solution de $y' = -0,5y + 3$.
- 3.2** Donner la solution constante de cette équation et interpréter physiquement cette valeur.
- 3.3** Déterminer l'expression de $u(t)$ sachant que $u(0) = 0$.
- 3.4** On pose $\tau = RC$. Calculer $u(\tau)$ (arrondi à 10^{-2}) et vérifier que le condensateur est alors chargé à environ 63 % de E .
- 3.5** Déterminer, par le calcul, l'instant auquel la tension atteint 95 % de E (valeur exacte puis arrondi à 10^{-1}).
- 3.6** L'intensité du courant vérifie $i(t) = C u'(t)$. Démontrer que $i(t) = 3,0 e^{-0,5t}$, en milliampères, puis vérifier que $i(0) = \frac{E}{R}$.

Exercice 4 Une commune qui grandit



Au 1^{er} janvier 2026, une commune de Guyane, territoire où la natalité est élevée, compte 20 000 habitants. Chaque année, sa population augmente de 2 % par le solde naturel, et 500 nouveaux habitants s'y installent. On modélise la population par une fonction P dérivable sur $[0; +\infty[$, où t désigne le temps écoulé en années depuis le 1^{er} janvier 2026, vérifiant $P'(t) = 0,02 P(t) + 500$ et $P(0) = 20\,000$.

- 4.1** Donner la solution constante de l'équation différentielle et expliquer pourquoi elle n'a aucun sens dans ce contexte.
- 4.2** Démontrer que, pour tout $t \geq 0$, $P(t) = 45\,000 e^{0,02t} - 25\,000$.
- 4.3** Estimer la population de la commune au 1^{er} janvier 2036 (arrondir à l'unité).
- 4.4** Déterminer le plus petit entier n tel que $P(n) \geq 40\,000$, puis l'année correspondante.
- 4.5** Sans les nouvelles installations, la population vérifierait $P' = 0,02 P$ avec la même population initiale. Quelle serait alors la population en 2036 ? Quel est donc l'effet des arrivées sur dix ans ?

Exercice 5 Le remplissage d'un bassin



Lors d'un orage, l'eau de pluie tombant sur la toiture d'un hangar remplit un bassin de récupération de capacité 20 m^3 . Le débit d'entrée, en mètres cubes par heure, est modélisé pour $t \geq 0$ par $d(t) = 10 t e^{-0,25 t^2}$, où t est le temps écoulé en heures depuis le début de l'orage. Le volume $V(t)$ d'eau contenue dans le bassin vérifie $V'(t) = d(t)$ et $V(0) = 0$.

- 5.1** Vérifier que la fonction $t \mapsto -20 e^{-0,25 t^2}$ est une primitive de d sur $[0; +\infty[$, puis en déduire que $V(t) = 20 \left(1 - e^{-0,25 t^2}\right)$.

- 5.2 Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $d'(t) = 10(1 - 0,5t^2)e^{-0,25t^2}$. En déduire l'instant où le débit est maximal (valeur exacte puis arrondi à 10^{-2}) ainsi que ce débit maximal, arrondi à 10^{-2} .
- 5.3 Calculer $V(2)$ et $V(5)$, arrondis à 10^{-2} .
- 5.4 Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t)$. Le bassin peut-il déborder ? Justifier.
- 5.5 Déterminer la valeur exacte puis l'arrondi à 10^{-2} de l'instant auquel le bassin contient 18 m^3 d'eau.

Exercice 6 La croissance d'un arbre et la méthode d'Euler



La hauteur $h(t)$ d'un jeune paulownia, arbre à croissance très rapide, en mètres, t années après sa plantation, est modélisée par

$$h'(t) = 0,2(12 - h(t)), \quad h(0) = 1.$$

- 6.1 Justifier que h est solution de $y' = -0,2y + 2,4$, donner la solution constante et l'interpréter, puis déterminer l'expression de $h(t)$.
- 6.2 La méthode d'Euler consiste à approcher $h(t + p)$ par $h(t) + ph'(t)$, où p est un pas choisi. Avec $p = 1$, montrer que la valeur approchée de $h(1)$ obtenue est 3,2, puis compléter le tableau 1 (arrondir à 10^{-3}).
- 6.3 Calculer la valeur exacte de $h(4)$ (arrondie à 10^{-3}). La méthode d'Euler surestime-t-elle ou sous-estime-t-elle la hauteur ? Proposer une manière d'améliorer la précision.
- 6.4 Recopier et compléter les lignes 4 et 5 de la fonction `euler` ci-contre, qui renvoie la valeur approchée de $h(np)$ obtenue par la méthode d'Euler de pas p .
- 6.5 Déterminer, par le calcul, l'âge auquel l'arbre atteint 10 m (valeur exacte puis arrondi à 10^{-1}).

```
1 def euler(p, n):
2     t, h = 0, 1
3     for k in range(n):
4         h = ...
5         t = ...
6     return h
```

t	2	3	4
$h(t)$			

Tableau 1 — Méthode d'Euler, $p = 1$

Exercice 7 Lire un champ de tangentes



On considère l'équation différentielle $(E) : y' = -0,5y + 2$. En chaque point de coordonnées $(x; y)$ de la figure 2, on a tracé un petit segment de coefficient directeur $-0,5y + 2$: toute courbe solution de (E) est, en chacun de ses points, tangente au segment tracé en ce point. Le repère est orthonormé.

- 7.1 Justifier que tous les segments situés sur la droite d'équation $y = 4$ sont horizontaux, et que la fonction constante égale à 4 est solution de (E) .
- 7.2 Sur la figure 2 (à reproduire ou à photocopier), tracer à main levée l'allure des deux courbes solutions passant respectivement par les points $A(0; 1)$ et $B(0; 6)$.
- 7.3 Déterminer par le calcul les expressions des solutions f et g de (E) telles que $f(0) = 1$ et $g(0) = 6$.
- 7.4 Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0, puis vérifier que son coefficient directeur est cohérent avec le segment tracé en A .
- 7.5 Que peut-on dire du comportement en $+\infty$ de toutes les solutions de (E) ? Le lire sur la figure, puis le démontrer.

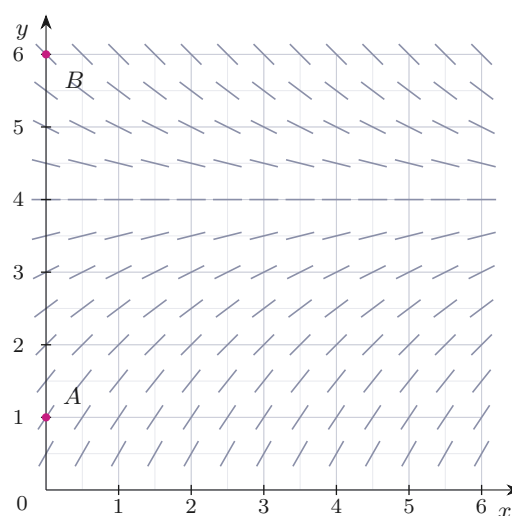


Figure 2 — Champ de tangentes de (E)