

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 2



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 1 Limites de suites

Les bases : définitions, limites usuelles, opérations, comparaison, q^n

9 exercices · niveau ●○○ à ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Utiliser les définitions d'une suite de limite $+\infty$, $-\infty$ ou ℓ , et reconnaître une suite sans limite.
- Déterminer une limite à l'aide des limites usuelles et des opérations, lever une indétermination en factorisant le terme prépondérant.
- Utiliser les théorèmes de comparaison et le théorème des gendarmes, la limite de q^n , le théorème de la suite croissante majorée ; écrire un algorithme de seuil.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ signifie : tout intervalle $[A ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ signifie : tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes à partir d'un certain rang.
- **Limites usuelles** : $\lim n = \lim n^2 = \lim n^3 = \lim \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n^2} = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. **Formes indéterminées** : $(+\infty) - (+\infty)$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$; on les lève en factorisant le terme prépondérant.
- **Comparaison** : si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$. **Gendarmes** : si $u_n \leq w_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim u_n = \lim v_n = \ell$, alors $\lim w_n = \ell$.
- **Limite de q^n** : si $q > 1$, $\lim q^n = +\infty$; si $-1 < q < 1$, $\lim q^n = 0$; si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.
- **Théorème (admis)** : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

Exercice 1 Revenir à la définition

●○○

Dans chaque cas, déterminer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, le terme u_n appartienne à l'intervalle indiqué. Reprendre ensuite le raisonnement avec un intervalle quelconque de la même forme $[A ; +\infty[$ avec A réel, ou $]5 - \varepsilon ; 5 + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$: que peut-on en conclure ?

- 1.1 $u_n = 3n - 7$ et l'intervalle $[500 ; +\infty[$.
 1.2 $u_n = n^2 + 1$ et l'intervalle $[10^6 ; +\infty[$.
 1.3 $u_n = 5 - \frac{1}{n}$ (pour $n \geq 1$) et l'intervalle $]4,999 ; 5,001[$.

Exercice 2 Limites usuelles

●○○

Donner, lorsqu'elle existe, la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

- a) $u_n = n^3$ b) $u_n = \frac{4}{\sqrt{n}}$ c) $u_n = 2 + \frac{7}{n^2}$ d) $u_n = -n$
 e) $u_n = (-1)^n$ f) $u_n = \frac{1}{n} - 6$ g) $u_n = \sqrt{n} + n$ h) $u_n = (-1)^n n$

Pour les suites e) et h), justifier qu'elles n'ont pas de limite en donnant deux « valeurs limites » différentes selon la parité de n .

Exercice 3 Lire une limite sur un graphique



On a représenté ci-dessous les points de coordonnées $(n; u_n)$ et $(n; v_n)$ pour deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_n = 2 + \frac{5}{n+1}$ et $v_n = 1 + (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$.



Figure 1 — Les vingt et un premiers termes des suites (u_n) (à gauche) et (v_n) (à droite)

- 3.1** Conjecturer graphiquement la limite de la suite (u_n) . Que représentent les deux droites en pointillés ?
- 3.2** Déterminer par le calcul le plus petit entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, u_n appartienne à l'intervalle $]1,9; 2,1[$.
- 3.3** La suite (v_n) semble-t-elle avoir une limite ? Calculer v_{20} et v_{21} , puis justifier la réponse.

Exercice 4 Le tableau des opérations



Recopier et compléter le tableau ci-dessous, où (u_n) et (v_n) sont deux suites. Lorsque l'on ne peut pas conclure, écrire « F.I. » (forme indéterminée).

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim (u_n + v_n)$	$\lim (u_n \times v_n)$	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
3	$+\infty$			
$+\infty$	$+\infty$			
-2	0 avec $v_n > 0$			
$+\infty$	$-\infty$			
0	$+\infty$			

- 4.1** Compléter le tableau.
- 4.2** Pour la somme de la quatrième ligne, donner deux exemples de suites (u_n) et (v_n) conduisant à des limites différentes : c'est ce qui justifie l'appellation « forme indéterminée ».
- 4.3** Déterminer, en précisant l'opération utilisée, la limite des suites définies pour $n \geq 1$ par :

a) $a_n = \left(3 + \frac{1}{n}\right)(n^2 - 5)$ b) $b_n = \frac{8}{n^2 + 4}$ c) $c_n = \left(2 - \frac{5}{\sqrt{n}}\right)(-n)$

Exercice 5 Lever une indétermination



Les suites suivantes sont définies pour tout entier naturel n . Chacune des limites suivantes conduit d'abord à une forme indéterminée. Préciser laquelle, puis lever l'indétermination en factorisant le terme prépondérant du numérateur et du dénominateur.

a) $u_n = n^2 - 5n - 2$ b) $v_n = \frac{3n^2 + 2n - 1}{n^2 + 5}$ c) $w_n = \frac{2n + 7}{n^2 - 3}$

d) $t_n = \frac{n^3 + n}{4n^2 + 1}$ e) $a_n = \frac{-n^2 + 3n}{2n^2 + n + 1}$ f) $b_n = \frac{5 \times 2^n - 3}{2^n + 1}$

Exercice 6 La suite (q^n) 

- 6.1** Donner la limite, lorsqu'elle existe, des suites de terme général : $0,96^n$, $1,04^n$, $(-0,8)^n$, $(-1,5)^n$, $\left(\frac{3}{2}\right)^n$, $\left(\frac{2}{7}\right)^n$.
- 6.2** Un capital de 2500 euros est placé à intérêts composés au taux de 3 % par an ; une population d'oiseaux de 12 000 individus diminue de 7 % par an. On note c_n le capital, en euros, et p_n l'effectif de la population au bout de n années. Exprimer c_n et p_n en fonction de n , puis déterminer leurs limites. Ces modèles sont-ils réalistes à très long terme ?
- 6.3** Déterminer la limite de la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par $s_n = 1 + 0,4 + 0,4^2 + \dots + 0,4^n$.
On rappelle que $1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ pour $q \neq 1$.

Exercice 7 Comparaison et gendarmes

On rappelle que, pour tout entier naturel n , $-1 \leq \cos n \leq 1$ et $-1 \leq \sin n \leq 1$.

- 7.1** Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n + \cos n$. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n - 1$, puis déterminer la limite de (u_n) .
- 7.2** Soit (v_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $v_n = \frac{\sin n}{n}$. Encadrer v_n , puis déterminer sa limite.
- 7.3** Soit (w_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $w_n = \frac{2n + (-1)^n}{n}$. Déterminer sa limite par le théorème des gendarmes.
- 7.4** Soit (t_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $t_n = 3^n - 4n$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 3$, $3^n \geq 8n$. En déduire que $t_n \geq 4n$ pour tout entier $n \geq 3$, puis la limite de la suite (t_n) .

Exercice 8 Croissante et majorée

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{2}$.

- 8.1** Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- 8.2** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.
- 8.3** Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ? Énoncer précisément le théorème utilisé.
- 8.4** Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = 6 - u_n$. Démontrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, puis exprimer u_n en fonction de n et retrouver la limite de (u_n) .

Exercice 9 Un algorithme de seuil

Une association compte 2 000 adhérents et leur nombre augmente de 15 % par an. On note u_n le nombre d'adhérents au bout de n années, exprimé en milliers : ainsi $u_0 = 2$.

- 9.1** Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \times 1,15^n$, puis déterminer la limite de (u_n) .
- 9.2** Recopier et compléter les lignes 3 et 5 de la fonction Python ci-contre pour que l'appel `seuil(A)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geq A$.
- 9.3** Expliquer pourquoi cette boucle se termine toujours, quelle que soit la valeur de A . Déterminer à la calculatrice la valeur renvoyée par l'appel `seuil(100)` et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```

1 def seuil(A):
2     n = 0
3     u = ...
4     while u < A:
5         u = ...
6         n = n + 1
7     return n

```