

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 2



R. RINGUET · 2026 – 2027

Approfondissement Limites de suites

Pour aller plus loin : démonstrations du cours, divergence lente, suites adjacentes

7 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

Exercice 1 Les démonstrations du cours



- 1.1 Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.** Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Soit A un réel quelconque.
- Justifier qu'il existe un entier N tel que $u_N > A$.
 - En utilisant la croissance de (u_n) , montrer que $u_n > A$ pour tout entier $n \geq N$. Conclure.
 - En déduire que toute suite croissante est soit convergente, soit de limite $+\infty$.
- 1.2 Limite de q^n .** On admet l'inégalité de Bernoulli : $(1 + a)^n \geq 1 + na$ pour tout réel $a > 0$ et tout entier naturel n .
- Soit $q > 1$. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
 - Soit q tel que $-1 < q < 1$ et $q \neq 0$. En considérant la suite de terme général $\left(\frac{1}{|q|}\right)^n$ et en encadrant q^n , démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
 - Soit $q \leq -1$. Démontrer que la suite (q^n) n'a pas de limite. On pourra distinguer les termes de rang pair et ceux de rang impair.
- 1.3 Unicité de la limite.** Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel ℓ et soit ℓ' un réel différent de ℓ . À l'aide d'intervalles ouverts bien choisis autour de ℓ et de ℓ' , expliquer pourquoi (u_n) ne peut pas aussi converger vers ℓ' .

Exercice 2 Une divergence très lente



Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

- Calculer H_1 , H_2 et H_4 (valeurs exactes). Justifier que la suite (H_n) est croissante.
- Montrer que $H_4 - H_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$, puis que $H_8 - H_4 \geq \frac{1}{2}$.
- Soit p un entier naturel. En regroupant les termes d'indices $2^p + 1, 2^p + 2, \dots, 2^{p+1}$, montrer que $H_{2^{p+1}} - H_{2^p} \geq \frac{1}{2}$.
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel p , $H_{2^p} \geq 1 + \frac{p}{2}$.
- En déduire que la suite (H_n) n'est pas majorée, puis sa limite. Quel théorème de la question 1.1 utilise-t-on ?
- Combien de termes faut-il, au minimum, pour que la minoration de la question 2.4 garantisse $H_n \geq 20$? Commenter la vitesse de divergence.

Exercice 3 La méthode de Héron



On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$.

```
1 def heron(n):
2     u = 2
3     for k in range(n):
4         u = (u + 2/u) / 2
5     return u
```

3.1 La fonction Python heron ci-contre renvoie u_n . Les appels heron(1), heron(2) et heron(3) renvoient respectivement 1,5; 1,416666...; 1,4142156... Que peut-on conjecturer?

3.2 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

3.3 Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$. En déduire que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout entier $n \geq 1$.

3.4 Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0$. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3.5 On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $e_n = u_n - \sqrt{2}$. Déduire de la question 3.3 que $0 \leq e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2\sqrt{2}}$, puis que $0 \leq e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2}$.

3.6 En admettant que $e_1 \leq 0,09$, démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $e_n \leq 2 \times \left(\frac{1}{20}\right)^{2^{n-1}}$. En déduire la limite de la suite (u_n) , puis justifier que u_4 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près.

Exercice 4 Deux suites adjacentes (hors programme — pour aller plus loin)



Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n \times n!}$, où $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

4.1 Calculer a_1, a_2, a_3 et b_3 (valeurs exactes puis arrondies à 10^{-4}).

4.2 Démontrer que la suite (a_n) est croissante.

4.3 Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $b_{n+1} - b_n = \frac{-1}{n(n+1) \times (n+1)!}$. En déduire que la suite (b_n) est décroissante.

4.4 Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, $a_n \leq b_n \leq b_1$, puis que la suite (a_n) converge. On note ℓ sa limite. Démontrer de même que (b_n) converge, et que sa limite vaut également ℓ .

4.5 Donner un encadrement de ℓ d'amplitude inférieure à 10^{-3} . Quel nombre célèbre reconnaît-on?

4.6 Écrire une fonction Python encadrement(p) qui renvoie le couple $(a_n; b_n)$ pour le plus petit entier n tel que $b_n - a_n \leq 10^{-p}$.

Exercice 5 Une récurrence linéaire d'ordre 2 (hors programme — pour aller plus loin)



On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = 5$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

5.1 Calculer u_2, u_3 et u_4 .

5.2 Déterminer deux réels α et β tels que le nombre $\alpha \times 2^n + \beta \times 3^n$ soit égal à u_n pour $n = 0$ et pour $n = 1$.

5.3 Démontrer, à l'aide d'une récurrence double (si $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies alors $P(n+2)$ l'est), que $u_n = \alpha \times 2^n + \beta \times 3^n$ pour tout entier naturel n .

- 5.4** Déterminer la limite de la suite (u_n) , puis celle de la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On pourra factoriser par 3^n .
- 5.5** On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 5$, $w_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $w_{n+2} = \frac{5}{6}w_{n+1} - \frac{1}{6}w_n$. En procédant comme aux questions 5.2 et 5.3, déterminer deux réels λ et μ tels que $w_n = \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout entier naturel n , puis la limite de (w_n) et celle de $\frac{w_{n+1}}{w_n}$.

Exercice 6 Une fraction continue



On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + u_n}$.

La fonction Python `terme` ci-contre renvoie u_n . Les appels `terme(1)` à `terme(5)` renvoient : 1,5; 1,4; 1,41666...; 1,41379...; 1,414285...

```
1 def terme(n):
2     u = 1
3     for k in range(n):
4         u = 1 + 1/(1 + u)
5     return u
```

- 6.1** Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ? La suite semble-t-elle monotone?
- 6.2** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$.
- 6.3** Vérifier que $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$, puis montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(1 - \sqrt{2})(u_n - \sqrt{2})}{1 + u_n}$.
- 6.4** En déduire que, pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4} |u_n - \sqrt{2}|$, puis, par récurrence, que $|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
- 6.5** Conclure quant à la limite de la suite (u_n) en citant le théorème utilisé. À partir de quel rang n la majoration de la question 6.4 garantit-elle que u_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près?

Exercice 7 Problème ouvert : partager un carré



On part d'un carré de côté 1. À chaque étape, on partage le carré restant en quatre carrés identiques et on colorie celui situé en bas à gauche, puis on recommence dans le carré situé en haut à droite (figure 1). Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n l'aire totale coloriée après n étapes.

- 7.1** Déterminer A_1 , A_2 et A_3 . Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, $A_{n+1} = A_n + \frac{1}{4^{n+1}}$.
- 7.2** Exprimer A_n en fonction de n , puis déterminer la limite de la suite (A_n) .
- 7.3** La partie non coloriée du carré a-t-elle une aire qui tend vers 0? Justifier.
- 7.4** **Question ouverte.** On modifie la règle : à chaque étape, on colorie les trois carrés autres que celui situé en haut à droite. Que devient la limite de l'aire coloriée? Proposer une interprétation géométrique du résultat.

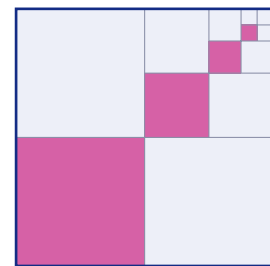


Figure 1 — Les quatre premières étapes