

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 8

Contrôle B Fonctions sinus et cosinus

Vrai ou faux, équations et inéquations, étude de fonction, optimisation

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

Les quatre exercices sont indépendants. Toute résolution d'équation ou d'inéquation trigonométrique doit être justifiée, au besoin par un cercle trigonométrique figurant sur la copie ; les ensembles de solutions sont donnés à l'aide d'intervalles ou en fonction d'un entier relatif k . La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements sont prises en compte.

Exercice 1 Vrai ou faux

4 pts ●●●○

Pour chacune des cinq affirmations, dire si elle est vraie ou fausse **en justifiant** : une démonstration pour une affirmation vraie, un contre-exemple pour une affirmation fausse. Chaque réponse correcte et justifiée rapporte 0,8 point.

- 1.1 Pour tout réel x , $\cos(2x) = 2 \cos x$.
- 1.2 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \cos x$ est paire.
- 1.3 La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + \sin x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- 1.4 L'équation $\cos x = \frac{3}{4}$ n'admet aucune solution dans $[0 ; \pi]$.
- 1.5 La courbe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sin(3x)$ est invariante par la translation de vecteur $\frac{2\pi}{3} \vec{i}$.

Exercice 2 Équations et inéquations

5 pts ●●●○

- 2.1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$.
- 2.2 Résoudre sur $[0 ; \pi]$ l'équation $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. On commencera par préciser l'intervalle décrit par $2x + \frac{\pi}{3}$.
- 2.3 Résoudre sur $[-\pi ; \pi]$ l'inéquation $2 \sin x + 1 > 0$.
- 2.4 Résoudre sur $[0 ; 2\pi]$ l'équation $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 2.5 Sur la figure 1, l'arc tracé en gras représente l'ensemble des solutions, sur $[-\pi ; \pi]$, d'une inéquation de la forme $\cos x \leq a$. Déterminer a , puis écrire cet ensemble de solutions à l'aide d'intervalles.

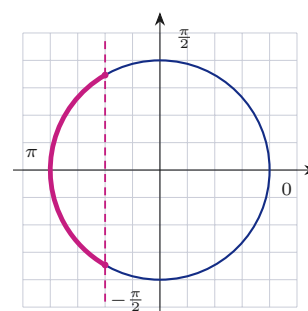


Figure 1 — L'arc des solutions

Exercice 3 Étude de la fonction $x \mapsto 2 \sin x - x$

6 pts ●●●

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 2\pi]$ par $f(x) = 2 \sin x - x$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

- 3.1 Calculer $f'(x)$, résoudre $f'(x) = 0$ sur $[0 ; 2\pi]$, puis étudier le signe de $f'(x)$.
- 3.2 Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 2\pi]$, avec les valeurs exactes de $f(0)$, $f(\frac{\pi}{3})$, $f(\frac{5\pi}{3})$ et $f(2\pi)$.
- 3.3 Calculer $f''(x)$, en déduire les intervalles de convexité de f et les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
- 3.4 Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. En utilisant la concavité de f sur $[0 ; \pi]$, en déduire que $f(x) \leq x$, puis que $\sin x \leq x$ pour tout x de $[0 ; \pi]$.
- 3.5 Démontrer que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur $[0 ; 2\pi]$, puis en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} obtenu par balayage à la calculatrice.
- 3.6 Tracer T et l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans le repère de la figure 2 (à rendre avec la copie).

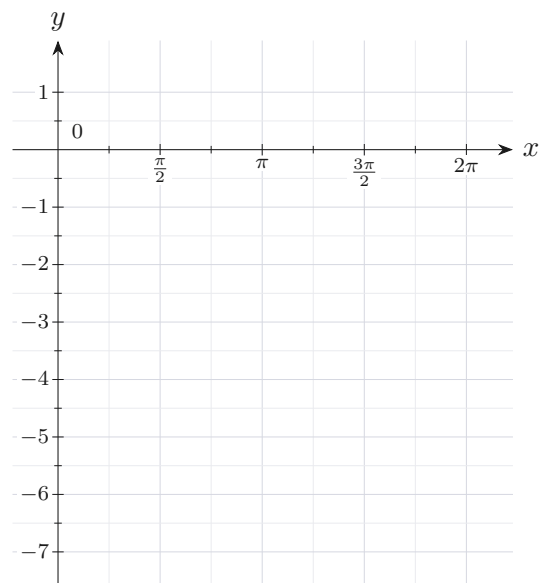


Figure 2 — Repère à compléter

Exercice 4 La gouttière

5 pts ●●●

Une gouttière est fabriquée à partir d'une longue bande de métal de largeur 30 cm, pliée en trois bandes de 10 cm : la bande centrale $[AB]$ reste horizontale et les deux bandes latérales sont relevées, chacune faisant un angle θ avec l'horizontale, où $\theta \in]0 ; \frac{\pi}{2}]$. La section de la gouttière est le trapèze $ABCD$ de la figure 3. Le débit de la gouttière est d'autant plus grand que l'aire de cette section est grande.

- 4.1 Justifier que la hauteur du trapèze vaut $10 \sin \theta$ et que $DC = 10 + 20 \cos \theta$, puis que l'aire de la section, en cm^2 , est $\mathcal{A}(\theta) = 100 \sin \theta (1 + \cos \theta)$.
- 4.2 Calculer les valeurs exactes de $\mathcal{A}(\frac{\pi}{2})$ et $\mathcal{A}(\frac{\pi}{3})$.
- 4.3 Montrer que, pour tout θ de $]0 ; \frac{\pi}{2}]$,

$$\mathcal{A}'(\theta) = 100 (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1).$$

On utilisera l'égalité $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

- 4.4 Étudier le signe de $\mathcal{A}'(\theta)$ sur $]0 ; \frac{\pi}{2}]$ et dresser le tableau de variations de $\mathcal{A}$.
- 4.5 En déduire l'angle θ donnant le débit maximal, ainsi que l'aire de section correspondante (valeur exacte, puis arrondie au cm^2). De combien de pour cent cette aire dépasse-t-elle celle obtenue avec un pliage en rectangle ? (arrondir à 1 %)

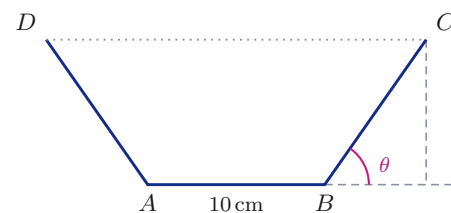


Figure 3 — Section de la gouttière