

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 8



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle A Fonctions sinus et cosinus

Dérivées, équations et inéquations trigonométriques, étude de fonction, modélisation

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

Les quatre exercices sont indépendants. Toute résolution d'équation ou d'inéquation trigonométrique doit être justifiée, au besoin par un cercle trigonométrique figurant sur la copie. Les tableaux de signes et de variations doivent être complets. Le QCM ne demande aucune justification. La qualité de la rédaction est prise en compte.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●○○○

Pour chacune des cinq questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Dans tout l'exercice, k désigne un entier relatif.

- 1.1** L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ est :
- a) $\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$ b) $\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$ c) $\{\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi\}$ d) $\{\frac{\pi}{3} + k\pi\}$
- 1.2** La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ est :
- a) $-\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ b) $2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$
 c) $-2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ d) $-2\cos(2x + \frac{\pi}{3})$
- 1.3** La fonction sinus est :
- a) paire et 2π -périodique b) impaire et 2π -périodique
 c) impaire et π -périodique d) paire et π -périodique
- 1.4** Sur $[-\pi; \pi]$, l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour ensemble de solutions :
- a) $\{-\frac{\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}\}$ b) $\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\}$ c) $\{-\frac{\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}\}$ d) $\{-\frac{\pi}{3}\}$
- 1.5** Une équation de la tangente à la courbe de la fonction cosinus au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est :
- a) $y = -x + \frac{\pi}{2}$ b) $y = x - \frac{\pi}{2}$ c) $y = -x$ d) $y = 0$

Exercice 2 Dérivées, équations, inéquations

4 pts ●○○○

- 2.1** Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.
- a) $f(x) = 2\sin x - 3\cos x$ b) $f(x) = x\sin x$
 c) $f(x) = \cos(3x - \frac{\pi}{6})$ d) $f(x) = (\cos x)^2$
- 2.2** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 2.3** Résoudre sur $[-\pi; \pi]$ l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, puis l'inéquation $\cos x \leq -\frac{1}{2}$.

Exercice 3 Étude de la fonction $x \mapsto \sin x + \cos x$

6 pts ●●○

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 2\pi]$ par $f(x) = \sin x + \cos x$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

- 3.1 Calculer $f'(x)$. À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre l'équation $\cos x = \sin x$ sur $[0 ; 2\pi]$, puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 2\pi]$.
- 3.2 Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 2\pi]$, avec les valeurs exactes de $f(0)$, $f(\frac{\pi}{4})$, $f(\frac{5\pi}{4})$ et $f(2\pi)$.
- 3.3 Montrer que $f''(x) = -f(x)$ pour tout x de $[0 ; 2\pi]$.
- 3.4 Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $[0 ; 2\pi]$ (on pourra de nouveau utiliser le cercle trigonométrique), puis, à l'aide du tableau de variations, déterminer le signe de $f(x)$ sur $[0 ; 2\pi]$.
- 3.5 En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe, puis les coordonnées des deux points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
- 3.6 Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{3\pi}{4}$, puis tracer T et l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans le repère de la figure 1 (à rendre avec la copie).

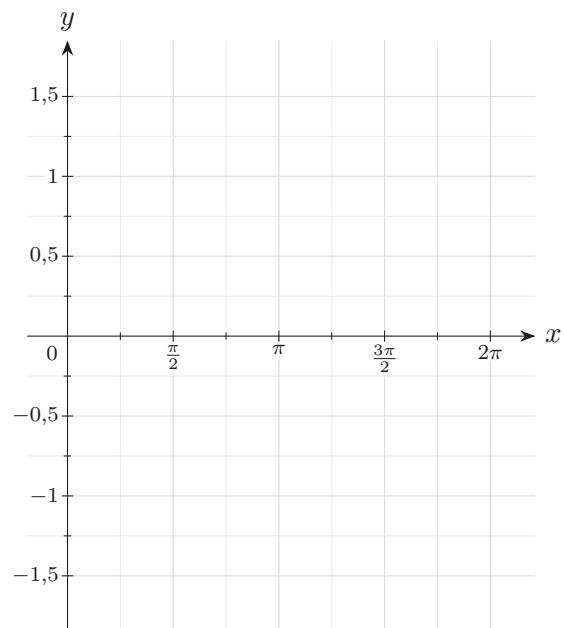


Figure 1 — Repère à compléter

Exercice 4 La durée du jour

5 pts ●●○

À une latitude d'environ 49° nord, la durée du jour (temps écoulé entre le lever et le coucher du Soleil), exprimée en heures, le 21 du mois numéro m , est modélisée par

$$d(m) = 12 + 4 \sin\left(\frac{\pi(m-3)}{6}\right), \quad m \in [1 ; 12].$$

- 4.1 Calculer $d(3)$, $d(6)$ et $d(12)$, puis interpréter ces trois valeurs.
- 4.2 Calculer la valeur exacte de $d(1)$, puis sa valeur arrondie à 0,1 heure.
- 4.3 Justifier que la fonction $t \mapsto 12 + 4 \sin\left(\frac{\pi(t-3)}{6}\right)$ est 12-périodique sur $\mathbb{R}$ et expliquer pourquoi cette propriété est attendue ici.
- 4.4 Résoudre l'inéquation $d(m) \geq 14$ sur $[1 ; 12]$, interpréter le résultat, puis vérifier sa cohérence avec la figure 2.
- 4.5 Calculer $d'(m)$. En quel mois la durée du jour augmente-t-elle le plus vite? Donner alors cette vitesse d'augmentation, arrondie à 0,01 heure par mois.

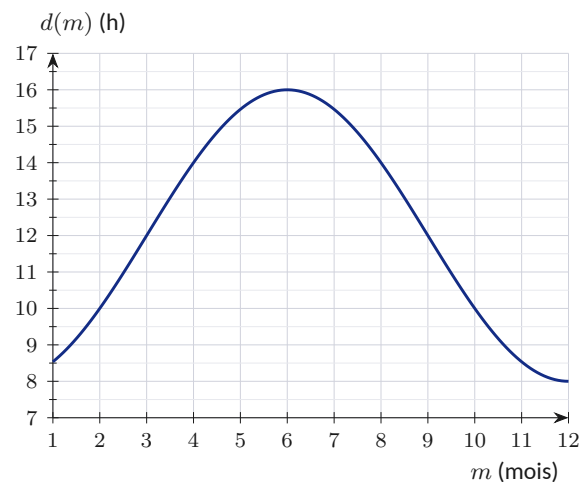


Figure 2 — Durée du jour sur une année