

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 7



R. RINGUET · 2026 - 2027

Fiche de cours

Fonction logarithme népérien

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 DÉFINITION ET LIEN AVEC L'EXPONENTIELLE

Définition. La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est définie sur $]0; +\infty[$ et, pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$y = \ln x \iff x = e^y.$$

Propriété. Pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$: $\ln(e^y) = y$, $e^{\ln x} = x$, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln e^n = n$.

Remarque. $\ln x$ n'existe que pour $x > 0$: avant tout calcul, chercher l'ensemble de définition.

2 PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Propriété — relation fondamentale. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. On en déduit, pour $a > 0$, $b > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$:

■ FORMULAIRE

- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$; $\ln(a^n) = n \ln a$; $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.
- Valeurs utiles : $\ln 2 \approx 0,69$; $\ln 3 \approx 1,10$; $\ln 10 \approx 2,30$.

3 ÉTUDE DE LA FONCTION $\ln$

Propriété. $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\ln)'(x) = \frac{1}{x} > 0$: elle est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.

Propriété — limites aux bornes. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ (asymptote verticale : l'axe des ordonnées) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

x	0	$+\infty$
$(\ln)'(x)$		+
$\ln x$	$-\infty$	$+\infty$

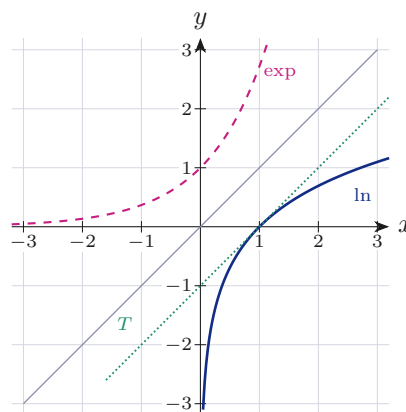


Figure 1 — Les courbes de $\ln$ et de $\exp$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. En pointillés verts, la tangente T à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse 1 : $y = x - 1$.

Propriété — dérivée d'une composée. Si u est dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I , alors $\ln u$ est dérivable sur I et

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Propriété — croissances comparées. Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0.$$

À l'infini, $\ln$ croît moins vite que toute puissance de x .

4 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

Propriété. La stricte croissance de $\ln$ donne, pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln a = \ln b \iff a = b, \quad \ln a < \ln b \iff a < b, \quad \ln a > 0 \iff a > 1.$$

Méthode — résoudre $\ln A(x) = \ln B(x)$. déterminer d'abord l'ensemble D des x tels que $A(x) > 0$ et $B(x) > 0$, puis résoudre $A(x) = B(x)$ et ne garder que les solutions appartenant à D .

Méthode — résoudre $q^n \leq A$ ou $q^n \geq A$ (seuil, $q > 0$, $A > 0$). appliquer $\ln : n \ln q \leq \ln A$, puis diviser par $\ln q$ **en changeant le sens de l'inégalité si $\ln q < 0$** , c'est-à-dire si $0 < q < 1$.

5 LOGARITHME DÉCIMAL

Définition. Pour $x > 0$, le **logarithme décimal** est $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$. Il a les mêmes propriétés algébriques que $\ln$, avec $\log 10 = 1$: pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log(10^n) = n$; pour tout réel y , $y = \log x \iff x = 10^y$. Usage en physique-chimie : $\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+]$, niveau sonore $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ (en dB).

6 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Passer d'une écriture exponentielle à une écriture logarithmique et réciproquement ; simplifier une expression avec les propriétés algébriques.
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction contenant $\ln$, puis dériver $\ln u$ et dresser le tableau de variations.
- Résoudre équations et inéquations avec $\ln$ ou $\exp$; déterminer le plus petit entier n vérifiant un seuil.
- Lever une indétermination par croissances comparées ; déterminer les asymptotes d'une courbe.
- Étudier une fonction du type $x \mapsto x - \ln x$ ou $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ et exploiter le tableau de variations.

7 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — équation

Résoudre $\ln(x-1) + \ln(x+2) = \ln 4$. Conditions : $x > 1$ et $x > -2$, donc $D =]1; +\infty[$. L'équation s'écrit $\ln((x-1)(x+2)) = \ln 4$, soit $x^2 + x - 6 = 0 : x = 2$ ou $x = -3$. Seul $2 \in D : S = \{2\}$.

★ EXEMPLE — seuil

Une population diminue de 8 % par an : $u_n = u_0 \times 0,92^n$. Chercher n tel que $u_n \leq 0,5 u_0$, c'est résoudre $0,92^n \leq 0,5$, soit $n \ln 0,92 \leq \ln 0,5$, donc $n \geq \frac{\ln 0,5}{\ln 0,92} \approx 8,3$ (**le sens change** car $\ln 0,92 < 0$) : au bout de 9 ans.

★ EXEMPLE — étude d'une fonction

Soit $f(x) = x - \ln x$ sur $]0; +\infty[$. Alors $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, du signe de $x-1$: f décroît sur $]0; 1]$, croît sur $[1; +\infty[$; minimum $f(1) = 1 > 0$. On en déduit $\ln x < x$ pour tout $x > 0$.

✖ PIÈGES

- $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$ et $\ln(ab) \neq \ln a \times \ln b$: seules les formules du formulaire sont valables.
- $\ln$ n'est définie que sur $]0; +\infty[$: vérifier les conditions de positivité *avant* de résoudre, puis conclure dans D .
- $\ln x < 0$ pour $0 < x < 1$: diviser par $\ln q$ avec $0 < q < 1$ inverse l'inégalité.
- $(\ln x)^2$ et $\ln(x^2) = 2 \ln x$ (pour $x > 0$) sont deux expressions différentes.