

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 7



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 2 Fonction logarithme népérien

Problèmes : datation, seuils, échelles logarithmiques, études de fonctions

8 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Utiliser le logarithme pour résoudre *exactement* un problème de seuil ($e^{-\lambda t} \leq A$, $q^n \leq A$) et pour inverser une relation exponentielle ; comparer avec la recherche par balayage.
- Manipuler le logarithme décimal et les échelles logarithmiques utilisées en physique-chimie (pH, décibels, magnitude) ; étudier une fonction comportant $\ln$ et interpréter ses variations dans un contexte.

► MÉTHODE — Le logarithme décimal

Pour $x > 0$, on pose $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$: alors $\log 10 = 1$, $\log 1 = 0$, $\log(ab) = \log a + \log b$, $\log(a^n) = n \log a$, et, pour tout réel y , $\log(10^y) = y$ et $10^{\log x} = x$.

Exercice 1 La datation au carbone 14

●●○

Tout organisme vivant contient une proportion constante de carbone 14 ; à sa mort, cette quantité décroît : si N_0 est la quantité présente à l'instant de la mort, la quantité restante t années plus tard est $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, où $\lambda > 0$. La *demi-vie* du carbone 14 (durée au bout de laquelle la moitié des noyaux a disparu) vaut 5 730 ans.

- 1.1 Traduire la définition de la demi-vie par une équation, puis démontrer que $\lambda = \frac{\ln 2}{5730}$. Donner la valeur de λ arrondie à 10^{-6} , en précisant son unité.
- 1.2 Un fragment d'os retrouvé sur un site archéologique contient encore 68 % du carbone 14 qu'il contenait à la mort de l'animal. Montrer que son âge t vérifie $t = -\frac{5730 \ln 0,68}{\ln 2}$, puis donner cet âge arrondi à 10 ans.
- 1.3 La méthode n'est plus fiable lorsqu'il reste moins de 1 % du carbone 14 initial. Déterminer, par le calcul, à partir de quel âge (arrondi à 100 ans) c'est le cas.
- 1.4 Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ et interpréter ce résultat dans le contexte.

Exercice 2 Niveau sonore et décibels

●●○

Le niveau sonore L , en dB, d'un son d'intensité acoustique I , en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$, est $L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, où $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ (seuil d'audibilité).

- 2.1 Calculer le niveau sonore d'une conversation, d'intensité $I = 1,0 \times 10^{-6} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.
- 2.2 Exprimer I en fonction de L et de I_0 . En déduire l'intensité acoustique d'un concert à 105 dB, en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$, en notation scientifique avec deux chiffres significatifs.
- 2.3 Démontrer que doubler l'intensité acoustique augmente le niveau sonore de $10 \log 2$ décibels, soit environ 3,0 dB, *quelle que soit* l'intensité de départ.
- 2.4 Dans un atelier, n machines identiques fonctionnent ensemble : l'intensité totale est n fois celle d'une machine, qui produit seule 85 dB. Déterminer le plus grand entier n tel que le niveau sonore de l'atelier ne dépasse pas 95 dB.

Exercice 3 Le pH d'une solution



Le pH d'une solution aqueuse est défini par $\text{pH} = -\log([H_3O^+])$, où $[H_3O^+]$ désigne la concentration en ions oxonium exprimée en $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

- 3.1 Calculer le pH d'une solution telle que $[H_3O^+] = 2,5 \times 10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ (arrondi à 10^{-1}).
- 3.2 Exprimer $[H_3O^+]$ en fonction du pH. Application : le sang a un pH de 7,4 ; calculer la concentration correspondante, en notation scientifique avec deux chiffres significatifs.
- 3.3 On dilue une solution d'acide fort en multipliant son volume par 10, ce qui divise $[H_3O^+]$ par 10. Démontrer que le pH augmente alors exactement de 1.
- 3.4 Démontrer que $\text{pH} = -\frac{\ln([H_3O^+])}{\ln 10}$, puis déterminer le nombre de dilutions successives par 10 faisant passer une solution d'acide fort de pH 2,0 à un pH au moins égal à 6,5.

Exercice 4 Un seuil, enfin exact



Une voiture achetée 18 000 € perd 18 % de sa valeur chaque année. On note v_n sa valeur, en euros, au bout de n années ; ainsi $v_0 = 18\,000$.

- 4.1 Justifier que (v_n) est géométrique de raison 0,82 et exprimer v_n en fonction de n .
- 4.2 Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et interpréter.
- 4.3 Résoudre par le calcul l'inéquation $v_n \leq 5000$ et en déduire au bout de combien d'années la voiture vaut moins de 5 000 €.
- 4.4 Déterminer de même le plus petit entier n tel que la voiture ait perdu au moins la moitié de sa valeur initiale.
- 4.5 La fonction `seuil` ci-contre cherche ce même rang par balayage. Recopier et compléter les lignes 5 et 6, puis donner la valeur renvoyée par `seuil(5000)`. Quel est l'avantage de la méthode de la question 4.3 ?

```

1 def seuil(s):
2     n = 0
3     v = 18000
4     while v > s:
5         v = ...
6         n = ...
7     return n

```

Exercice 5 L'échelle de Richter



La magnitude M d'un séisme se déduit de l'amplitude A des ondes enregistrées : $M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$, où A_0 est une amplitude de référence ; l'énergie E libérée, en joules, vérifie $\log E = 4,8 + 1,5 M$.

- 5.1 Un séisme produit une amplitude $A = 10^5 A_0$. Calculer sa magnitude.
- 5.2 Démontrer que deux séismes dont les magnitudes diffèrent de 1 ont des amplitudes dans le rapport 10.
- 5.3 Calculer l'énergie libérée par un séisme de magnitude 6 (en notation scientifique, deux chiffres significatifs).
- 5.4 Démontrer que si la magnitude augmente de 1, l'énergie libérée est multipliée par $10^{1,5}$, soit environ 31,6. Combien faut-il de séismes de magnitude 5 pour libérer l'énergie d'un séisme de magnitude 7 ?
- 5.5 Exprimer M en fonction de E , puis calculer la magnitude d'un séisme libérant $2,0 \times 10^{15} \text{ J}$ (arrondi à 10^{-1}).

Exercice 6 Le bénéfice d'une scierie



Une scierie produit x tonnes de granulés de bois par jour, avec $x \in [0 ; 20]$. Son bénéfice quotidien, en centaines d'euros, est modélisé par $B(x) = 30 \ln(x + 1) - 5x$.

- 6.1 Calculer $B(0)$ et $B(3)$ (arrondi à 10^{-2}), puis interpréter.
- 6.2 Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 20]$, $B'(x) = \frac{25 - 5x}{x + 1}$, puis dresser le tableau de variations de B sur $[0 ; 20]$.

- 6.3** En déduire la production quotidienne rendant le bénéfice maximal, ainsi que ce bénéfice (valeur exacte, puis arrondie à l'euro).
- 6.4** Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ admet exactement une solution α dans $[5; 20]$, puis en donner un encadrement d'amplitude 0,1 par balayage. Pour quelles productions la scierie est-elle bénéficiaire ?

Exercice 7 Lecture graphique et changement de variable



Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x$, de courbe $\mathcal{C}$ représentée sur la figure 1.

- 7.1** Par lecture graphique, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$, puis le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- 7.2** Résoudre *par le calcul* l'équation $f(x) = 0$ en posant $X = \ln x$. Les solutions exactes obtenues confirment-elles la lecture graphique ?
- 7.3** Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$, puis dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$: on admettra $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Donner la valeur exacte du minimum.
- 7.4** Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \leq 3$ (poser $X = \ln x$).

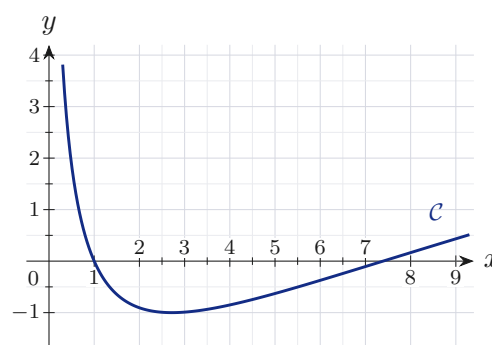


Figure 1 — Courbe $\mathcal{C}$ de f

Exercice 8 Deux placements



Un capital de 5 000 € est placé selon l'une des deux formules suivantes :

- **placement A** : intérêts composés au taux annuel de 3,5 %, de valeur $A(n) = 5000 \times 1,035^n$ au bout de n années entières ;
 - **placement B** : capitalisation continue, de valeur $B(t) = 5000 e^{0,034 t}$ au bout de t années.
- 8.1** Calculer $A(10)$ et $B(10)$, arrondis au centime. Quelle formule est la plus avantageuse au bout de 10 ans ?
- 8.2** Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $A(n) = 5000 e^{n \ln(1,035)}$. En comparant $\ln(1,035)$ et 0,034, en déduire quelle formule est la plus avantageuse au bout de n années, pour tout entier $n \geq 1$.
- 8.3** Déterminer la valeur exacte de la durée au bout de laquelle le placement B double le capital, puis son arrondi à 10^{-1} .
- 8.4** Déterminer *par le calcul* le plus petit entier n tel que $A(n) \geq 10\,000$, puis le plus petit entier n tel que les intérêts acquis avec le placement A dépassent 3 000 €.
- 8.5** On cherche un taux de capitalisation continue r tel que le capital double exactement en 15 ans. Déterminer la valeur exacte de r , puis une valeur approchée de r exprimée en pourcentage, arrondie à 0,01 %.