

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 6



R. RINGUET · 2026 – 2027

Sujet type bac Convexité

Modèle logistique d'une épidémie, point d'inflexion — QCM avec lectures graphiques

Durée : 1 h 30 · calculatrice autorisée · 2 exercices indépendants · barème sur 12

Nom : Prénom : Classe : Note : / 12

★ CONSIGNES

Deux exercices indépendants, notés comme à l'épreuve écrite du baccalauréat (7 points et 5 points). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte. Toute limite et toute étude de convexité doivent être justifiées.

Exercice 1 La propagation d'une épidémie

7 pts ●●○

Dans une ville, on étudie la propagation d'une épidémie. On note $f(x)$ le nombre *total* de personnes contaminées depuis le début de l'épidémie, x jours après son apparition. On modélise ce nombre par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{5000}{1 + e^{-0,25(x-20)}}.$$

Pour alléger l'écriture, on pose $w(x) = e^{-0,25(x-20)}$, de sorte que $f(x) = \frac{5000}{1 + w(x)}$.

Partie A — Étude de la fonction f

- 1.1** Calculer $f(20)$. Calculer $f(0)$ et en donner la valeur arrondie à l'unité; interpréter dans le contexte.
- 1.2** Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x)$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. En déduire une asymptote à $\mathcal{C}_f$ et interpréter ce résultat dans le contexte.
- 1.3** En écrivant $f(x) = 5000(1 + w(x))^{-1}$ et en remarquant que $w'(x) = -0,25w(x)$, montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{1250 w(x)}{(1 + w(x))^2}.$$

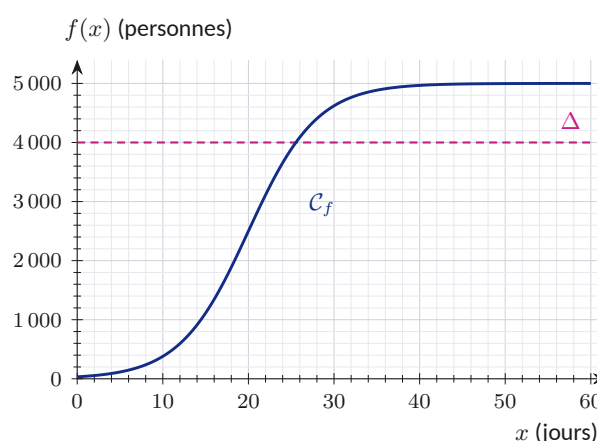
En déduire le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$ et interpréter.

- 1.4** On admet que, pour tout $x \geq 0$, $f''(x) = \frac{312,5 w(x)(w(x) - 1)}{(1 + w(x))^3}$.
- a) Justifier que $f''(x)$ est du même signe que $w(x) - 1$, puis démontrer que $w(x) > 1$ si et seulement si $x < 20$.
- b) En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe, puis concave, et donner les coordonnées du point d'inflexion I de $\mathcal{C}_f$.

Partie B — Interprétation dans le contexte

La figure 1 représente la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0 ; 60]$ et la droite Δ d'équation $y = 4000$.

- 1.5** Que représente $f'(x)$ dans le contexte de l'exercice ? Calculer $f'(20)$ et interpréter le résultat obtenu.
- 1.6** À l'aide de la partie A, justifier que le nombre quotidien de nouvelles contaminations augmente puis diminue, et préciser le jour où il est maximal.
- 1.7** Par lecture graphique, encadrer à 5 jours près le jour à partir duquel le nombre total de contaminés dépasse 4000.
- 1.8** Par balayage à la calculatrice, déterminer le plus petit entier x tel que $f(x) \geq 4500$.

Figure 1 — Nombre total de contaminés et droite Δ

Partie C — Comparaison de deux scénarios

Si des mesures sanitaires sont prises dès le premier jour, le nombre total de personnes contaminées est modélisé par la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par

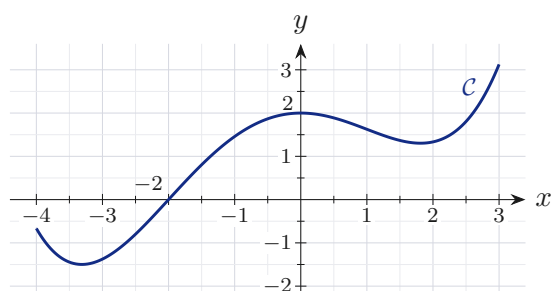
$$g(x) = \frac{5000}{1 + e^{-0,15(x-20)}}.$$

- 1.9** On admet que g a les mêmes variations que f , que sa courbe a un point d'inflexion d'abscisse 20 et que $g'(20) = 187,5$. Comparer $g'(20)$ et $f'(20)$: que signifie « aplatis la courbe » ?
- 1.10** Calculer $f(40)$ et $g(40)$, arrondis à l'unité. Quel scénario correspond à une épidémie plus étalée dans le temps ?
- 1.11** Les deux modèles prévoient-ils, à terme, le même nombre total de personnes contaminées ? Justifier.

Exercice 2 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●●○

Pour chacune des cinq questions, **une seule** des quatre réponses est exacte ; aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Les questions 2.1 et 2.2 se rapportent à la figure 2 : courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-4 ; 3]$, dont les points d'inflexion ont des abscisses entières.

Figure 2 — Courbe $\mathcal{C}$ sur $[-4 ; 3]$

- 2.1** La fonction f est convexe sur :
- a) $[-2 ; 1]$ b) $[-4 ; 0]$
c) $[-4 ; -2]$ et $[1 ; 3]$ d) $[-4 ; 3]$
- 2.2** Parmi les points de $\mathcal{C}$ d'abscisse comprise entre -2 et 1 , celui où la tangente a le plus petit coefficient directeur a pour abscisse :
- a) -2 b) -1 c) 0 d) 1
- 2.3** La courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{-x}$ admet un point d'inflexion d'abscisse :
- a) 0 b) 1 c) 2 d) elle n'en admet pas
- 2.4** Soit f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f''(x) = x^2(x - 4)$. La courbe de f admet :
- a) aucun point d'inflexion b) un seul point d'inflexion
c) deux points d'inflexion d) trois points d'inflexion
- 2.5** Pour tout réel $x \geq 0$:
- a) $\sqrt{x} \geq \frac{1+x}{2}$ b) $\sqrt{x} \leq \frac{1+x}{2}$ c) $\sqrt{x} \geq x$ d) $\sqrt{x} \leq x$