

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 6



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 2 Convexité

Problèmes : associer des courbes, esquisser, interpréter un point d'inflexion

6 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

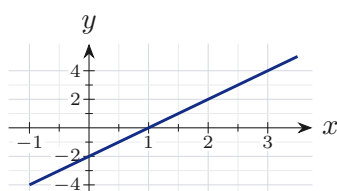
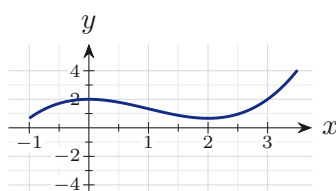
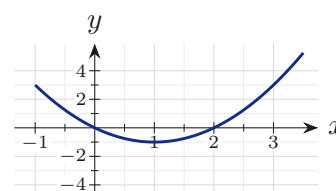
★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Associer les courbes de f , f' et f'' ; esquisser une courbe à partir de tableaux de variations et de signes.
- Interpréter la convexité et un point d'inflexion en contexte (coût marginal, vitesse d'un phénomène) ; démontrer une inégalité par une tangente.

Exercice 1 Associer trois courbes

●●○

Les trois courbes ci-dessous, tracées dans trois repères identiques (mêmes unités), sont celles d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-1 ; 3,5]$, de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f'' , dans le désordre.

Courbe C_1 Courbe C_2 Courbe C_3

- 1.1 Associer à C_1 , C_2 , C_3 la fonction représentée, en justifiant par deux arguments au moins (signe et variations, convexité, point d'inflexion).
- 1.2 Donner l'abscisse du point d'inflexion de C_f et celles des extremums locaux de f . Sachant que $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$, vérifier ces réponses par le calcul.

Exercice 2 Coût de production et coût marginal

●●○

Une entreprise fabrique q centaines de pièces par jour, avec $q \in [0 ; 12]$. Son coût total de production, en centaines d'euros, est modélisé par $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 100$. On appelle *coût marginal* la dérivée C' : $C'(q)$ est le coût approximatif de la centaine de pièces suivante.

- 2.1 Montrer que $C'(q) = 3q^2 - 24q + 60$, puis que $C' > 0$ sur $[0 ; 12]$. Qu'en déduit-on pour C ?
- 2.2 Calculer $C''(q)$, étudier son signe sur $[0 ; 12]$, préciser la convexité de C et donner les coordonnées du point d'inflexion de sa courbe.
- 2.3 Dresser le tableau de variations de C' sur $[0 ; 12]$. Pour quelle production le coût marginal est-il minimal, et quel est alors son montant en euros ?
- 2.4 Interpréter : quand chaque centaine supplémentaire coûte-t-elle de moins en moins cher ? de plus en plus cher ? Que représente $C'(0)$?

Exercice 3 La charge d'une batterie

●●○

La charge d'une batterie de téléphone, en pourcentage, est modélisée t minutes après le branchement par $C(t) = 100(1 - e^{-0,2t})$, pour $t \geq 0$.

- 3.1 Calculer $C(0)$ et $C(5)$ (arrondi à 0,1) et interpréter.
- 3.2 Montrer que $C'(t) = 20e^{-0,2t}$, en déduire le sens de variation de C , puis calculer $C'(0)$ en précisant son unité.
- 3.3 Calculer $C''(t)$ et étudier son signe. Qu'en déduit-on pour C' , puis pour la *vitesse de charge* ?

- 3.4** Déterminer une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 ; par concavité, démontrer que $C(t) \leq 20t$ pour $t \geq 0$, et conclure : au rythme initial, en combien de temps la batterie serait-elle pleine ?
- 3.5** Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ et interpréter, puis, par balayage, le plus petit entier t tel que $C(t) \geq 99$.

Exercice 4 Esquisser une courbe

●●○

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[-3; 5]$, de tableau de variations ci-dessous. On sait de plus que $f''(x) < 0$ sur $[-3; 1[$, $f''(x) > 0$ sur $]1; 5]$, et que $f(1) = 1$, $f'(-3) = 3$, $f'(1) = -3$, $f'(5) = 4$.

x	-3	-1	3	5	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	2	5	-3	1	

Tableau 1 — Variations de f sur $[-3; 5]$

- 4.1** Préciser les intervalles sur lesquels f est convexe, puis concave, et donner les coordonnées du point d'inflexion I de $\mathcal{C}_f$.
- 4.2** Dresser le tableau de variations de f' sur $[-3; 5]$, en y plaçant les valeurs connues de f' .
- 4.3** Tracer, dans le repère ci-contre, les tangentes aux points d'abscisses -3, -1, 1, 3 et 5, puis une allure possible de $\mathcal{C}_f$.

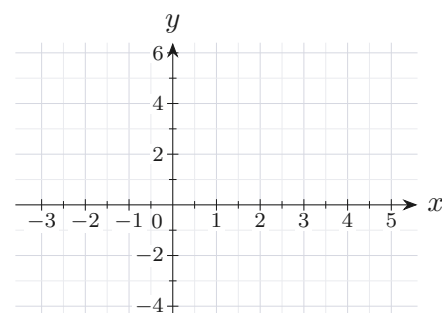


Figure 1 — Repère à compléter

Exercice 5 Une courbe et sa tangente d'inflexion

●●○

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

- 5.1** Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en écrivant $f(x) = \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$; en déduire une asymptote à $\mathcal{C}_f$.
- 5.2** Montrer que $f'(x) = -xe^{-x}$ et dresser le tableau de variations complet de f (limites comprises).
- 5.3** Montrer que $f''(x) = (x-1)e^{-x}$, étudier son signe, préciser la convexité de f et le point I (exact, puis arrondi à 10^{-2}).
- 5.4** Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point I ; vérifier qu'elle passe par le point de coordonnées $(3; 0)$.
- 5.5** Sans nouveau calcul, préciser la position de $\mathcal{C}_f$ et de sa tangente au point d'abscisse 2 sur $[1; +\infty[$. Justifier.

Exercice 6 Deux points d'inflexion, une tangente horizontale

●●○

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 5$.

- 6.1** Montrer que $f'(x) = 4x(x-3)^2$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 6.2** Montrer que $f''(x) = 12(x-1)(x-3)$, étudier son signe, puis déterminer les coordonnées des deux points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
- 6.3** Justifier que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3 est horizontale, bien que f n'y admette ni maximum ni minimum.
- 6.4** La fonction convexe ci-contre teste par balayage si f semble convexe sur $[a; b]$. Compléter les lignes 7 et 8, puis donner $\text{convexe}(3, 6, 0.1)$ et $\text{convexe}(0, 5, 0.1)$.

```

1 def d2(x):
2     return 12*(x-1)*(x-3)
3 def convexe(a, b, pas):
4     x = a
5     while x <= b:
6         if d2(x) < 0:
7             return ...
8         x = ...
9     return True

```