

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 6



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle B Convexité

Vrai ou faux, lecture sur la courbe de f'' , étude avec exponentielle, modélisation

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

Une affirmation déclarée fausse doit être réfutée par un contre-exemple explicite. Toute étude de convexité doit être justifiée. Les tableaux de signes et de variations doivent être complets (bornes, limites, flèches). La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

4 pts ●●○○

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et **justifier** la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

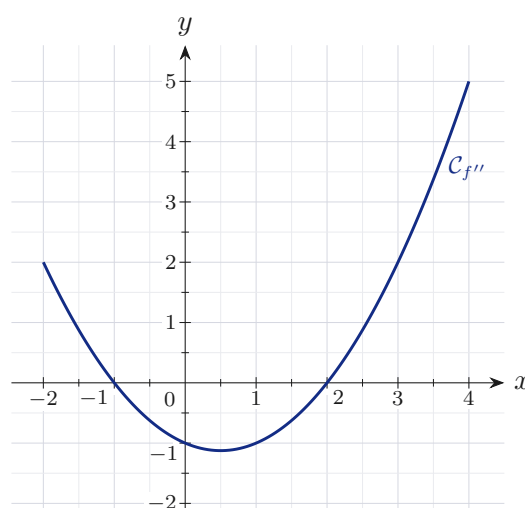
- 1.1 Affirmation :** « si f est convexe sur $\mathbb{R}$ et si $f(0) = 0$, alors $f(x) \geq 0$ pour tout réel x ».
- 1.2 Affirmation :** « si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a est un point d'inflexion ».
- 1.3 Affirmation :** « la fonction $x \mapsto x^4 - 6x^2$ est convexe sur $[-1; 1]$ ».
- 1.4 Affirmation :** « si f est convexe sur $\mathbb{R}$, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x ».

Exercice 2 Lire sur la courbe de f''

4 pts ●●○○

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[-2; 4]$. La figure 1 représente la courbe de sa *dérivée seconde* f'' .

- 2.1** Déterminer, par lecture graphique, le signe de $f''(x)$ sur $[-2; 4]$.
- 2.2** En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe, puis concave, et les abscisses des points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
- 2.3** Dresser le tableau de variations de f' sur $[-2; 4]$ (sans valeur).
- 2.4** On sait de plus que $f'(-1) = 0$. Justifier que $f'(x) \leq 0$ pour tout x de $[-2; 2]$, puis que f n'admet pas d'extremum en -1 .
- 2.5** Que peut-on dire de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 ?

Figure 1 — Courbe de f'' sur $[-2; 4]$

Exercice 3 Une fonction croissante à deux points d'inflexion

6 pts ●●●

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1)e^x$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

- 3.1** Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis, en écrivant $f(x) = x^2 e^x + e^x$ et en utilisant une croissance comparée, déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. En déduire une asymptote à $\mathcal{C}_f$.
- 3.2** Montrer que $f'(x) = (x + 1)^2 e^x$, en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations complet (limites comprises).
- 3.3** Montrer que $f''(x) = (x + 1)(x + 3)e^x$, étudier son signe, puis préciser les intervalles de convexité et de concavité de f et les coordonnées des deux points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ (valeurs exactes, puis arrondies à 10^{-2}).
- 3.4** Justifier que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 est horizontale, bien que f n'y admette ni maximum ni minimum.
- 3.5** Calculer $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$ et $f(0,5)$, arrondis à 10^{-2} , puis tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans le repère ci-contre (à rendre avec la copie).

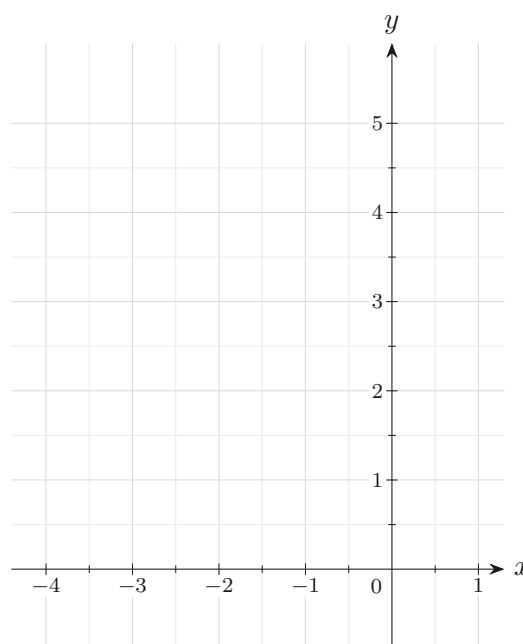


Figure 2 — Repère à compléter

Exercice 4 La croissance d'un arbre

6 pts ●●●

La hauteur d'un arbre, en mètres, t années après sa plantation, est modélisée par

$$h(t) = \frac{t^2}{30} - \frac{t^3}{1350}, \quad t \in [0; 30].$$

- 4.1** Calculer $h(0)$, $h(15)$ et $h(30)$, puis interpréter ces trois valeurs.
- 4.2** Montrer que $h'(t) = \frac{t(30 - t)}{450}$, étudier son signe sur $[0; 30]$ et dresser le tableau de variations de h .
- 4.3** Calculer $h''(t)$, étudier son signe sur $[0; 30]$, puis préciser les intervalles de convexité et de concavité de h et les coordonnées du point d'inflexion de sa courbe.
- 4.4** Au bout de combien d'années la croissance de l'arbre est-elle la plus rapide ? Quelle est alors sa vitesse de croissance, en mètres par an ? Justifier à l'aide de la question 4.3.
- 4.5** Calculer $h'(5)$ et $h'(25)$, en mètres par an. Que remarque-t-on ? Interpréter ce résultat en comparant les deux périodes de la vie de l'arbre.
- 4.6** Déterminer une équation de la tangente à la courbe de h au point d'inflexion, puis interpréter son coefficient directeur.
- 4.7** Un jardinier utilise ce modèle pour prévoir la hauteur de l'arbre à 45 ans. Calculer $h(45)$ et expliquer pourquoi le modèle ne peut pas être prolongé au-delà de 30 ans.