

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 6



R. RINGUET · 2026 – 2027

Contrôle A Convexité

Dérivée seconde, convexité, point d'inflexion, lecture graphique

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

Toute étude de convexité doit être justifiée par le signe de la dérivée seconde ou par un argument graphique explicite. Les tableaux de signes et de variations doivent être complets. Les réponses du QCM ne demandent aucune justification. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●○○○

Pour chacune des cinq questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

- 1.1** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$ est convexe sur :
- a) $\mathbb{R}$ b) $] -\infty ; 1]$ c) $[1 ; +\infty[$ d) $[0 ; 2]$
- 1.2** Soit f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f''(x) = (x - 2)(x + 3)$. La courbe de f admet :
- a) aucun point d'inflexion b) un point d'inflexion
- c) deux points d'inflexion d) trois points d'inflexion
- 1.3** Si f' est strictement décroissante sur un intervalle I , alors :
- a) f est décroissante b) f est concave sur I c) f est convexe sur I d) f a un maximum sur I
- 1.4** Pour tout réel x :
- a) $e^x \leq 1 + x$ b) $e^x \geq 1 + x$ c) $e^x \leq x$ d) $e^x \geq x^2$
- 1.5** La tangente à une courbe en un point d'inflexion :
- a) est horizontale b) traverse la courbe
- c) est au-dessus de la courbe d) est en dessous de la courbe

Exercice 2 Dérivées secondes et convexité

4 pts ●○○○

- 2.1** Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f''(x)$, étudier son signe et en déduire les intervalles de convexité et de concavité de f .
- a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ sur $\mathbb{R}$ b) $f(x) = e^{-x} + 2x$ sur $\mathbb{R}$
- c) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ sur $] -2 ; +\infty[$ d) $f(x) = x^4 - 2x^3$ sur $\mathbb{R}$
- e) $f(x) = \sqrt{x+3}$ sur $] -3 ; +\infty[$ f) $f(x) = e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$

- 2.2** Pour la fonction d), recopier et compléter le tableau 1 ci-contre (signe de f'' , puis « convexe » ou « concave »), puis donner les coordonnées des deux points d'inflexion de sa courbe.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f''(x)$				
Convexité				

Tableau 1 — À compléter

Exercice 3 Étude d'une fonction polynomiale

6 pts ●●○

Soit f la fonction définie sur $[0; 4]$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

- 3.1** Montrer que $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de f sur $[0; 4]$.
- 3.2** Calculer $f''(x)$, étudier son signe sur $[0; 4]$, puis préciser les intervalles de convexité et de concavité de f et les coordonnées du point d'inflexion I de $\mathcal{C}_f$.
- 3.3** Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point I .
- 3.4** Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ et $f(4)$, puis tracer T et la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère ci-contre (à rendre avec la copie).
- 3.5** Sans nouveau calcul, préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1, puis par rapport à sa tangente au point d'abscisse 3. Justifier.
- 3.6** Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, puis en déduire que $f(x) \leq 9x + 1$ pour tout x de $[0; 2]$.

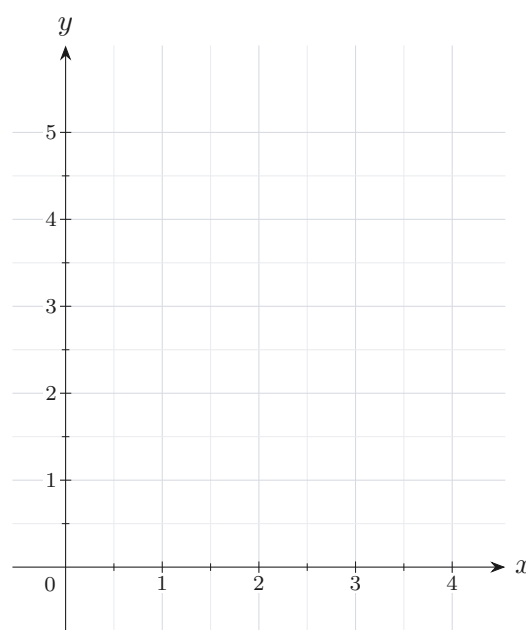


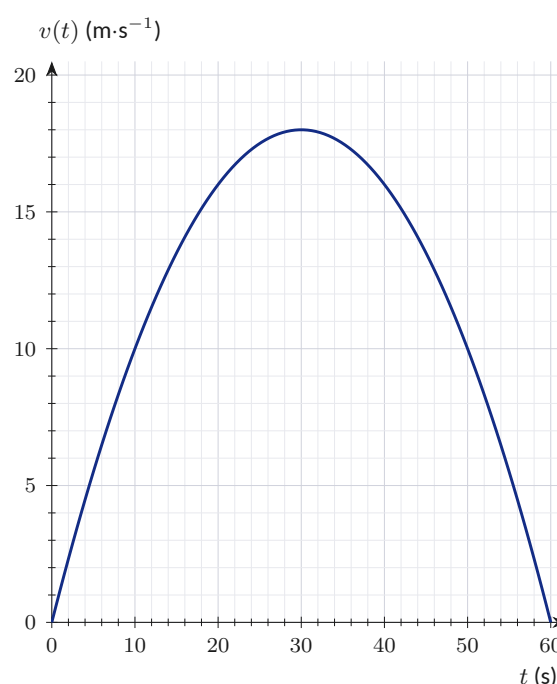
Figure 1 — Repère à compléter

Exercice 4 Le démarrage d'un train

5 pts ●●○

Un train démarre à l'instant $t = 0$. On note $d(t)$ la distance parcourue, en mètres, et $v(t) = d'(t)$ sa vitesse, en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, à l'instant t exprimé en secondes, pour $t \in [0; 60]$. La figure 2 représente la courbe de la vitesse v .

- 4.1** Par lecture graphique, donner la vitesse maximale du train et l'instant où elle est atteinte.
- 4.2** Sur quels intervalles la fonction d est-elle convexe? concave? Justifier à partir de la figure 2.
- 4.3** Que représente, pour le mouvement du train, le point d'inflexion de la courbe de d ?
- 4.4** On admet que $v(t) = 0,02t(60 - t)$. Calculer $d''(t) = v'(t)$, étudier son signe sur $[0; 60]$ et retrouver les résultats de la question 4.2.
- 4.5** Calculer $d''(0)$ et $d''(45)$, en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, et interpréter le signe de chacune de ces deux accélérations.
- 4.6** Retrouver par le calcul la vitesse maximale du train et l'instant où elle est atteinte.

Figure 2 — Vitesse du train sur $[0; 60]$