

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 4



R. RINGUET · 2026 – 2027

Sujet type bac Continuité

Étude d'une fonction avec exponentielle, TVI et dichotomie, suite $u_{n+1} = f(u_n)$
— QCM

Durée : 1 h 30 · calculatrice autorisée · 2 exercices indépendants · barème sur 12

Nom : Prénom : Classe : Note : / 12

★ CONSIGNES

Deux exercices indépendants, notés comme à l'épreuve écrite du baccalauréat (7 points et 5 points). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte. Toute application du théorème des valeurs intermédiaires doit être rédigée en vérifiant explicitement ses hypothèses.

Exercice 1 Une population d'oiseaux dans une réserve

7 pts ●●○

Une réserve naturelle accueille une population d'oiseaux migrateurs. On note u_n le nombre de couples nicheurs recensés au printemps de l'année $2026 + n$, exprimé en centaines. Le premier recensement donne $u_0 = 1$ et les écologues modélisent l'évolution de cette population par

$$u_{n+1} = 3 - e^{-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On note f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 3 - e^{-x}$, de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie A — Étude de la fonction f

- 1.1 Calculer $f(0)$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.
- 1.2 Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) = e^{-x}$, puis dresser le tableau de variations complet de f sur $[0; +\infty[$ (limite comprise).
- 1.3 Justifier que f est continue sur $[0; +\infty[$ et démontrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $2 \leq f(x) < 3$. En déduire que, pour tout réel x de $[1; 3]$, $f(x)$ appartient à $[1; 3]$.

Partie B — Résolution approchée de l'équation $f(x) = x$

On note g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x = 3 - e^{-x} - x$.

- 1.4 Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $g'(x) = e^{-x} - 1$. Étudier le signe de $g'(x)$ et en déduire le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$.
- 1.5 Calculer $g(0)$ et déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- 1.6 Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$, puis que $2 < \alpha < 3$.
- 1.7 Déterminer, par balayage à la calculatrice, un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

```

1 def dichotomie():
2     a = 2
3     b = 3
4     while b - a > 0.001:
5         m = (a + b) / 2
6         if 3 - exp(-m) - m > 0:
7             a = m
8         else:
9             b = m
10    return a, b

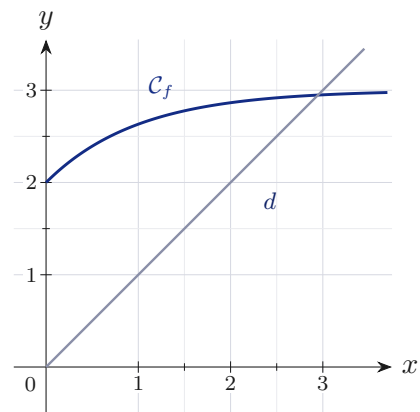
```

- 1.8 La fonction Python ci-contre, dans laquelle la fonction `exp` a été importée, encadre α par dichotomie.

- a) Expliquer pourquoi le test de la ligne 6 permet de savoir si α est supérieur ou inférieur à m , puis compléter les lignes 7 et 9.
- b) Justifier qu'après n étapes l'amplitude de l'encadrement vaut $\frac{1}{2^n}$, puis déterminer le nombre d'étapes effectuées lors de l'appel `dichotomie(0.001)`.

Partie C — Étude de la suite (u_n)

- 1.9** Calculer u_1 , u_2 et u_3 , arrondis à 10^{-3} . Combien de couples nicheurs le modèle prévoit-il au printemps 2028 ?
- 1.10** Sur la figure 1, à rendre avec la copie, on a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d d'équation $y = x$. Placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis construire u_1 , u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction. Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et sur la limite de la suite (u_n) ?
- 1.11** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

Figure 1 — Courbe $\mathcal{C}_f$ et droite d d'équation $y = x$

- 1.12** En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ appartenant à $[1; 3]$. Justifier que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, puis que $\ell = \alpha$.
- 1.13** Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice, en donnant l'effectif prévu à long terme à l'unité près. Un écologue affirme : « selon ce modèle, la réserve comptera un jour plus de 300 couples nicheurs ». Que penser de cette affirmation ?

```

1 def annee(s):
2     n = 0
3     u = 1
4     while u < s:
5         u = ...
6         n = ...
7     return 2026 + n

```

- 1.14** La fonction Python ci-contre doit renvoyer l'année à partir de laquelle la population atteint s centaines de couples. Recopier et compléter les lignes 5 et 6, puis déterminer la valeur renvoyée par l'appel `annee(2.94)`. Expliquer pourquoi l'appel `annee(3)` ne renverrait aucun résultat.

Partie D — Comparaison avec un second modèle

Certains écologues proposent un second modèle : la population v_n , exprimée en centaines de couples, vérifie $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = h(v_n)$, où h est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{3x+2}{x+2}$.

- 1.15** Calculer v_1 , v_2 et v_3 : on donnera les valeurs exactes sous forme de fractions, puis les valeurs arrondies à 10^{-3} .
- 1.16** Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $h'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}$, puis justifier que h est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- 1.17** On admet que la suite (v_n) converge vers un réel $\ell' \geq 0$. Déterminer ℓ' .
- 1.18** Dans le repère ci-dessous, placer les points de coordonnées $(n; u_n)$ puis $(n; v_n)$ pour n allant de 0 à 3, et tracer les droites d'équations $y = \alpha$ et $y = \ell'$. Lequel des deux modèles est le plus optimiste ? De combien de couples nicheurs les deux prévisions diffèrent-elles à long terme ?

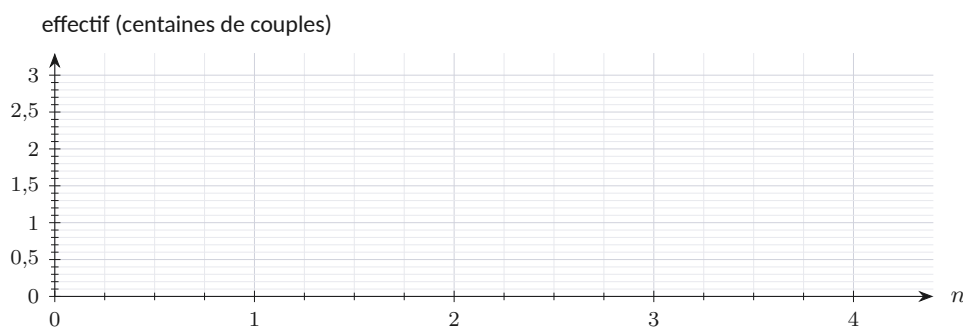


Figure 2 — Repère à compléter

Exercice 2 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●●●○

Pour chacune des cinq questions suivantes, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre choisie.

2.1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ si $x \neq 2$ et $f(2) = a$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

- a) $a = -4$ b) $a = 0$ c) $a = 2$ d) $a = 4$

2.2 En notant E la fonction partie entière, E est continue sur :

- a) $\mathbb{R}$ b) $[0 ; 1]$ c) $]1 ; 2[$ d) $[-1 ; 1]$

2.3 La figure 3 ci-contre représente la courbe d'une fonction f définie sur $[-2 ; 4]$. On peut affirmer que :

- a) f est continue sur $[-2 ; 4]$
 b) l'équation $f(x) = 2$ admet exactement une solution sur $[-2 ; 4]$
 c) f est continue sur $[-2 ; 1]$ et sur $]1 ; 4]$
 d) l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $[-2 ; 4]$

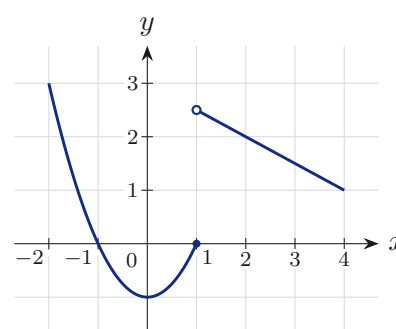


Figure 3 — Courbe de f

2.4 Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = \sqrt{3w_n + 4}$. On admet que (w_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$. Alors :

- a) $\ell = 1$ b) $\ell = 2$ c) $\ell = 3$ d) $\ell = 4$

2.5 Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x e^{-x}$. Sur $[0 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0,2$ admet :

- a) aucune solution b) exactement une solution
 c) exactement deux solutions d) une infinité de solutions