

Fiche de cours

Compléments sur la dérivation

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 FONCTION COMPOSÉE

Définition. Soit u définie sur I à valeurs dans J et v définie sur J . La **composée** de u suivie de v est la fonction $v \circ u$ définie sur I par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

Remarque. En général $v \circ u \neq u \circ v$: l'ordre compte. Pour décomposer, on repère la fonction « intérieure » u (ce qui est sous la racine, en exposant, dans la parenthèse) et la fonction « extérieure » v .

Méthode — ensemble de définition. $x \in I$ doit vérifier deux conditions : $u(x)$ existe, et $u(x)$ appartient à l'ensemble de définition de v (par exemple $u(x) \geq 0$ pour $\sqrt{u}$, $u(x) \neq 0$ pour $\frac{1}{u}$).

2 DÉRIVÉE D'UNE COMPOSÉE

Théorème. Si u est dérivable sur I et v dérivable sur $J \supset u(I)$, alors $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u', \quad \text{c'est-à-dire} \quad [v(u(x))]' = u'(x) \times v'(u(x)).$$

■ FORMULAIRE — les cas usuels, à connaître par cœur (u dérivable sur I)

- $(e^u)' = u' e^u$; $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ (u ne s'annulant pas si $n < 0$) ; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ si $u > 0$.
- $[f(ax+b)]' = a f'(ax+b)$; rappels : $(x^n)' = n x^{n-1}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(e^x)' = e^x$, $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$.
- Opérations : $(uv)' = u'v + uv'$; $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $(ku)' = ku'$.

Remarque. Dès que la fonction $\ln$ sera connue (chapitre 7), on ajoutera $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, valable lorsque $u > 0$.

Remarque. $\sqrt{u}$ peut être définie sans être dérivable là où u s'annule : $x \mapsto \sqrt{3x+7}$ est définie en $-\frac{7}{3}$ mais n'y est pas dérivable (tangente verticale).

3 DÉRIVÉE SECONDE

Définition. Si f' est elle-même dérivable sur I , sa dérivée est la **dérivée seconde** de f , notée f'' : $f'' = (f')'$.

Propriété. $f'' \geq 0$ sur I équivaut à « f' est croissante sur I » ; $f'' \leq 0$ équivaut à « f' est décroissante ».

Remarque. En cinématique, si $d(t)$ est la position d'un mobile à l'instant t , alors $d'(t)$ est sa **vitesse** et $d''(t)$ son **accélération**.

4 ÉTUDIER UNE FONCTION COMPOSÉE

Méthode — variations. Calculer f' , la **factoriser**, puis étudier son signe. Un facteur $e^{u(x)}$ est toujours strictement positif et un facteur $\sqrt{u(x)}$ ou $u(x)^2$ est positif : le signe de f' est donné par les autres facteurs. Dresser ensuite le tableau de variations avec les limites aux bornes.

Méthode — tangente. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Méthode — optimisation. Traduire le problème par une fonction sur un intervalle, dériver, étudier le signe de la dérivée, et conclure par le tableau de variations (extremum atteint en un point où f' s'annule *en changeant de signe*, ou à une borne de l'intervalle).

5 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Reconnaître et décomposer une composée $v \circ u$; déterminer son ensemble de définition.
- Dériver e^u , u^n , $\sqrt{u}$ et $x \mapsto f(ax+b)$, en combinant avec produit et quotient.
- Déterminer une équation de la tangente à une courbe en un point.
- Factoriser $f'(x)$, en étudier le signe et dresser un tableau de variations complet.
- Calculer une dérivée seconde et l'interpréter (sens de variation de f' , accélération).
- Résoudre un problème d'optimisation en modélisant par une fonction dérivable.

6 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — dériver e^u

$f(x) = e^{-x^2+4x}$ sur $\mathbb{R}$. Ici $u(x) = -x^2 + 4x$, donc $u'(x) = -2x + 4$ et $f'(x) = (-2x + 4)e^{-x^2+4x}$. Comme $e^{-x^2+4x} > 0$, le signe de f' est celui de $-2x + 4$: f croît sur $]-\infty; 2]$ et décroît sur $[2; +\infty[$.

★ EXEMPLE — dériver $\sqrt{u}$ et u^n

$g(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$: $g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. $h(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3} = (x^2+1)^{-3}$: $h'(x) = -3 \times 2x \times (x^2+1)^{-4} = \frac{-6x}{(x^2+1)^4}$.

★ EXEMPLE — tangente

$f(x) = (2x-3)^4$ et $a = 2$. Alors $f(2) = 1^4 = 1$ et $f'(x) = 4 \times 2 \times (2x-3)^3 = 8(2x-3)^3$, donc $f'(2) = 8$. La tangente a pour équation $y = 8(x-2) + 1$, soit $y = 8x - 15$.

★ EXEMPLE — dériver $x \mapsto f(ax+b)$

$k(x) = \frac{1}{3x+1}$ sur $]-\frac{1}{3}; +\infty[$: $k'(x) = 3 \times \frac{-1}{(3x+1)^2} = \frac{-3}{(3x+1)^2}$. $m(x) = \sqrt{5-2x}$ sur $]-\infty; 2,5[$: $m'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{5-2x}} < 0$, donc m est strictement décroissante.

★ EXEMPLE — optimisation et dérivée seconde

$f(x) = xe^{-2x}$ sur $[0; +\infty[$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (croissances comparées). On dérive un produit : $f'(x) = e^{-2x} + x \times (-2)e^{-2x} = (1-2x)e^{-2x}$, du signe de $1-2x$. Le maximum vaut donc $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2e} \approx 0,18$. De plus $f''(x) = (4x-4)e^{-2x}$ est négative pour $x < 1$: f' y décroît.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{2e}$	0

✗ PIÈGES

- Ne pas oublier le facteur u' : la dérivée de $(5x+2)^3$ est $15(5x+2)^2$, pas $3(5x+2)^2$.
- $v \circ u$ et $u \circ v$ sont deux fonctions différentes : $e^{x^2} \neq (e^x)^2$.
- La formule de $(\sqrt{u})'$ exige $u > 0$ strictement ; u^n avec $n < 0$ exige $u \neq 0$.
- f' peut s'annuler sans extremum ($x \mapsto x^3$ en 0) : il faut un *changement de signe* (sauf extremum à une borne).
- f'' renseigne sur les variations de f' , pas sur celles de f : ne pas confondre les deux tableaux.