

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 5

Exercices 2

 Compléments sur la dérivation

Problèmes : optimiser, modéliser, interpréter une dérivée et une dérivée seconde

8 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée



R. RINGUET · 2026 – 2027

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Mettre un problème d'optimisation en équation, dériver la fonction obtenue, dresser son tableau de variations et conclure en revenant au contexte.
- Étudier une fonction construite à partir des fonctions de référence (limites, dérivée, variations, tangentes); interpréter f' comme une vitesse et f'' comme la variation de cette vitesse; compléter un algorithme de recherche.

Exercice 1 Une boîte de volume maximal

●●○

Dans une plaque de carton carrée de 30 cm de côté, on découpe aux quatre coins un carré de côté x , en centimètres, puis on relève les quatre bords pour former une boîte sans couvercle (figure 1).

- 1.1 Justifier que $x \in]0; 15[$, puis que le volume de la boîte, en cm^3 , est $V(x) = x(30 - 2x)^2$.
- 1.2 Montrer que $V'(x) = (30 - 2x)(30 - 6x)$, étudier son signe sur $]0; 15[$ et dresser le tableau de variations de V .
- 1.3 En déduire la valeur de x rendant le volume maximal, ce volume maximal et les trois dimensions de la boîte obtenue. Exprimer enfin ce volume en litres.

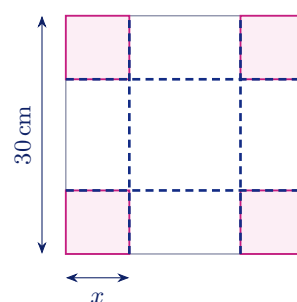


Figure 1 — Le patron

Exercice 2 Le refroidissement d'un plat

●●○

On sort du four un plat et on le laisse refroidir dans une pièce à 20°C . Sa température, en degrés Celsius, t minutes après sa sortie du four, est modélisée par $T(t) = 20 + 60e^{-0,25t}$, pour $t \geq 0$.

- 2.1 Calculer $T(0)$ et $T(10)$ (arrondi à 10^{-1}) et interpréter. Montrer que $T'(t) = -15e^{-0,25t}$, en déduire le sens de variation de T , puis interpréter $T'(0)$ en précisant son unité.
- 2.2 Vérifier que, pour tout $t \geq 0$, $T'(t) = -0,25(T(t) - 20)$: à quelle grandeur la vitesse de refroidissement est-elle proportionnelle ?
- 2.3 Calculer $T''(t)$ et étudier son signe. Qu'en déduit-on pour T' , puis pour la *rapidité* du refroidissement au cours du temps ?
- 2.4 Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ et interpréter. Par balayage, donner un encadrement d'amplitude 0,1 de l'instant où la température atteint 30°C .

Exercice 3 Du graphique au calcul



Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$, de courbe $\mathcal{C}$. La figure 2 représente $\mathcal{C}$ et sa tangente T_0 au point d'abscisse 0.

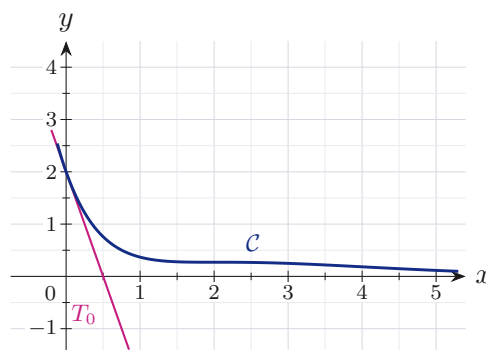


Figure 2 — Courbe $\mathcal{C}$ de g et tangente T_0

- 3.1** Par lecture graphique, donner $g(0)$ et une équation de T_0 .
- 3.2** Montrer que $g'(x) = -(x - 2)^2 e^{-x}$, en déduire le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$, puis retrouver par le calcul l'équation de T_0 .
- 3.3** Justifier que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 est horizontale et donner son équation (valeur exacte, puis arrondie à 10^{-3}).
- 3.4** Montrer que $g''(x) = (x - 2)(x - 4)e^{-x}$. On admet $\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 0$: dresser le tableau de variations de g' sur $\mathbb{R}$. En déduire, pour $x \geq 2$, l'abscisse du point de $\mathcal{C}$ où la tangente a le plus petit coefficient directeur, et ce coefficient (exact, puis arrondi à 10^{-3}).

Exercice 4 La boîte de conserve la plus économique



Une boîte de conserve est un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h , en centimètres, de volume 1 L, soit $1\,000\text{ cm}^3$. L'aire totale de sa surface (les deux disques et la surface latérale) est $2\pi r^2 + 2\pi r h$.

- 4.1** Exprimer h en fonction de r , puis montrer que l'aire de tôle utilisée est $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ et que $S'(r) = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2}$, pour $r > 0$.
- 4.2** Justifier que S' s'annule en changeant de signe pour une unique valeur $r_0 > 0$ telle que $r_0^3 = \frac{500}{\pi}$, puis dresser le tableau de variations de S sur $]0; +\infty[$ (limites comprises). Donner r_0 arrondi à 10^{-1} .
- 4.3** Montrer que, pour $r = r_0$, la hauteur de la boîte est égale à son diamètre. Calculer alors l'aire de tôle utilisée, arrondie à l'unité.

Exercice 5 La propagation d'une rumeur



Dans un lycée de 1000 élèves, le nombre d'élèves au courant d'une rumeur, t jours après son apparition, est modélisé par $N(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0,5t}}$, pour $t \geq 0$.

- 5.1** Calculer $N(0)$ et $N(4)$ (arrondi à l'unité) et interpréter.
- 5.2** En écrivant $N(t) = 1000 u(t)^{-1}$ avec $u(t) = 1 + 9e^{-0,5t}$, montrer que $N'(t) = \frac{4500 e^{-0,5t}}{(1 + 9e^{-0,5t})^2}$, puis en déduire le sens de variation de N .
- 5.3** Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ et interpréter ce résultat dans le contexte.
- 5.4** Calculer $N'(4)$ et $N'(12)$, arrondis à 10^{-1} , préciser leur unité et interpréter leur comparaison.
- 5.5** Par balayage à la calculatrice, déterminer le plus petit entier t tel que $N(t) \geq 900$.

Exercice 6 Le bénéfice d'une entreprise



Une entreprise fabrique et vend q milliers d'articles, avec $q \in [0; 60]$. Son bénéfice, en milliers d'euros, est modélisé par

$$B(q) = 20q e^{-0,1q} - 15.$$

- 6.1** Montrer que $B'(q) = (20 - 2q) e^{-0,1q}$, puis dresser le tableau de variations de B sur $[0; 60]$.
- 6.2** En déduire la production rendant le bénéfice maximal, et ce bénéfice arrondi à 10^{-2} .
- 6.3** La fonction `maxi` ci-contre cherche par balayage, avec un pas donné, la production rendant B maximal. Recopier et compléter les lignes 10 et 11, puis donner la valeur renvoyée par `maxi(0.5)`.
- 6.4** L'entreprise est bénéficiaire lorsque $B(q) > 0$. Par balayage, donner un encadrement d'amplitude 0,1 de chacune des deux solutions de $B(q) = 0$, puis conclure.

```

1  from math import exp
2
3  def B(q):
4      return 20*q*exp(-0.1*q) - 15
5
6  def maxi(pas):
7      q, qmax = 0, 0
8      while q <= 60:
9          if B(q) > B(qmax):
10             qmax = ...
11             q = ...
12     return qmax

```

Exercice 7 Le mouvement d'un piston



Dans un moteur, la position d'un piston par rapport à sa position médiane, exprimée en centimètres, à l'instant t exprimé en secondes, est $x(t) = 8 \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$, pour $t \geq 0$. On admet que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$ (propriété étudiée au chapitre 8).

- 7.1** Calculer $x(0)$. Montrer que la vitesse du piston est $v(t) = x'(t) = -16 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$, puis calculer $v(0)$ (valeur exacte, puis arrondie à 10^{-1}) en précisant son unité.
- 7.2** Montrer que l'accélération $a(t) = x''(t)$ vérifie, pour tout $t \geq 0$, $a(t) = -4x(t)$.
- 7.3** Résoudre $v(t) = 0$ pour $t \in [0; \pi]$ (on pourra poser $X = 2t + \frac{\pi}{3}$, qui décrit alors $[\frac{\pi}{3}; 2\pi + \frac{\pi}{3}]$). Quelle est la position du piston à ces instants ?
- 7.4** Justifier que, pour tout $t \geq 0$, $-8 \leq x(t) \leq 8$ et $|v(t)| \leq 16$. En quels instants de $[0; \pi]$ la vitesse est-elle maximale en valeur absolue ?

Exercice 8 À quelle vitesse rouler ?



Pour une camionnette de livraison roulant à la vitesse constante v , exprimée en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, avec $v \in [50; 130]$, le coût d'exploitation horaire (salaire du conducteur et carburant) est modélisé, en euros par heure, par $h(v) = 32 + 0,005 v^2$.

- 8.1** Justifier que le coût du kilomètre parcouru est $f(v) = \frac{32}{v} + 0,005 v$, pour $v \in [50; 130]$.
- 8.2** En écrivant $\frac{32}{v} = 32 v^{-1}$, montrer que $f'(v) = \frac{0,005 v^2 - 32}{v^2}$, puis étudier son signe et dresser le tableau de variations de f sur $[50; 130]$.
- 8.3** En déduire la vitesse qui rend le coût kilométrique minimal, ainsi que ce coût minimal.
- 8.4** Le trajet à effectuer mesure 480 km. Calculer le coût total et la durée du trajet à cette vitesse optimale, puis à $130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ (arrondis à 10^{-1}). Commenter.