

TERMINALE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · ANALYSE · CHAPITRE 10



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 1 Calcul intégral

Les bases : aire sous une courbe, calcul par une primitive, propriétés, valeur moyenne

9 exercices · niveau ●○○ à ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Interpréter une intégrale comme une aire, en unités d'aire ; encadrer une intégrale par des rectangles ; calculer une intégrale à l'aide d'une primitive.
- Utiliser la linéarité, la relation de Chasles, la positivité et l'intégration des inégalités ; calculer une valeur moyenne, une aire entre deux courbes, et interpréter une intégrale en contexte.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- **Aire sous la courbe.** Si f est continue et positive sur $[a ; b]$, $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire, en unités d'aire (u.a.), du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$; si l'unité vaut p cm en abscisse et q cm en ordonnée, $1 \text{ u.a.} = pq \text{ cm}^2$.
- **Théorème fondamental.** Si f est continue sur un intervalle I et si $a \in I$, la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .
- **Calcul.** Si F est une primitive de f sur I , alors pour tous $a, b \in I$: $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. En particulier $\int_a^a f = 0$ et $\int_b^a f = -\int_a^b f$. Cette formule reste valable si f change de signe.
- **Propriétés** (f et g continues sur $[a ; b]$, $a \leq b$). **Linéarité** : $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$. **Chasles** : $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$. **Positivité** : si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f \geq 0$. **Inégalités** : si $f \leq g$ sur $[a ; b]$ alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- **Valeur moyenne** de f sur $[a ; b]$ ($a < b$) : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. **Aire entre deux courbes** : si $f \geq g$ sur $[a ; b]$, l'aire entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ vaut $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ u.a.

Exercice 1 Lire une aire sur un graphique

●○○○

La figure 1 (réduite) représente, dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, la courbe d'une fonction f continue sur $[0 ; 7]$ et affine sur chacun des intervalles $[0 ; 2]$, $[2 ; 4]$, $[4 ; 6]$ et $[6 ; 7]$.

- 1.1 En calculant des aires de rectangles, de triangles ou de trapèzes, déterminer $\int_0^2 f(x) dx$, $\int_2^4 f(x) dx$ et $\int_4^6 f(x) dx$.
- 1.2 En déduire $\int_0^6 f(x) dx$ à l'aide de la relation de Chasles. Exprimer ce résultat en cm^2 .
- 1.3 Déterminer $\int_6^7 f(x) dx$. Pourquoi ce nombre est-il négatif ? En déduire $\int_0^7 f(x) dx$, puis $\int_7^0 f(x) dx$.
- 1.4 Calculer la valeur moyenne de f sur $[0 ; 4]$, puis sur $[0 ; 6]$ (valeur exacte).
- 1.5 Déterminer le réel x de $[2 ; 4]$ tel que $\int_0^x f(t) dt = 7$.

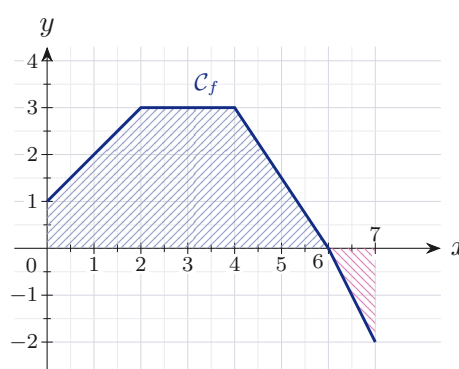


Figure 1 — La courbe de f sur $[0 ; 7]$

Exercice 2 Encadrer une aire par des rectangles



On note $I = \int_0^2 x^2 dx$. On partage $[0; 2]$ en quatre intervalles de même longueur 0,5 et, sur chacun d'eux, on construit le rectangle inférieur (en vert) et le rectangle supérieur (en pointillés) comme sur la figure 2.

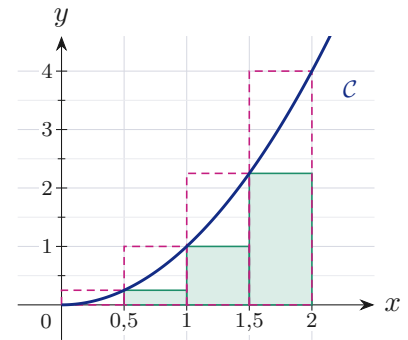


Figure 2 — Rectangles inférieurs et supérieurs

- 2.1 Justifier que la fonction carré est croissante sur $[0; 2]$. En déduire que, pour tout $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ et tout $x \in [0,5k; 0,5(k+1)]$, $(0,5k)^2 \leq x^2 \leq (0,5(k+1))^2$.
- 2.2 Calculer la somme s des aires des quatre rectangles inférieurs, puis la somme S des aires des quatre rectangles supérieurs.
- 2.3 En déduire un encadrement de I , puis une valeur approchée de I par la moyenne de s et de S .
- 2.4 Calculer la valeur exacte de I à l'aide d'une primitive de la fonction carré. L'encadrement obtenu est-il vérifié ?
- 2.5 On recommence avec n rectangles de largeur $\frac{2}{n}$. On admet que $S - s = \frac{2}{n} \times (2^2 - 0^2)$. Déterminer le plus petit entier n pour lequel l'amplitude de l'encadrement est strictement inférieure à 0,1.

Exercice 3 Calculer avec une primitive



Calculer chacune des intégrales suivantes en donnant sa valeur exacte.

- | | | |
|--------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\int_0^3 (2x + 1) dx$ | b) $\int_1^2 (3x^2 - 2x) dx$ | c) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ |
| d) $\int_0^1 e^x dx$ | e) $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$ | f) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ |
| g) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ | h) $\int_{-1}^1 (x^3 - x) dx$ | i) $\int_0^{\ln 2} e^{2x} dx$ |

Exercice 4 Reconnaître une forme composée



Pour chaque intégrale, préciser la forme reconnue et la fonction u choisie, puis calculer sa valeur exacte.

- | | | |
|---|------------------------------------|---|
| a) $\int_0^1 2x e^{x^2} dx$ | b) $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$ | c) $\int_0^1 3x^2 (x^3 + 1)^2 dx$ |
| d) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} dx$ | e) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ | f) $\int_0^1 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx$ |

Exercice 5 Utiliser les propriétés de l'intégrale



Soient f et g deux fonctions continues sur $[0; 5]$ telles que

$$\int_0^2 f(x) dx = 5, \quad \int_2^5 f(x) dx = -3, \quad \int_0^5 g(x) dx = 4.$$

- 5.1 Déterminer $\int_0^5 f(x) dx$, $\int_2^0 f(x) dx$ et $\int_0^5 (3f(x) + 2g(x)) dx$.
- 5.2 Calculer la valeur moyenne de f sur $[0; 5]$, puis sur $[2; 5]$.
- 5.3 On sait de plus que, pour tout $x \in [0; 5]$, $f(x) \leq h(x) \leq f(x) + 2$, où h est continue sur $[0; 5]$. Encadrer $\int_0^5 h(x) dx$.
- 5.4 Peut-on affirmer que f est négative sur tout l'intervalle $[2; 5]$? Peut-on affirmer que f prend au moins une valeur négative sur $[2; 5]$? Justifier.

Exercice 6 Une fonction définie par une intégrale

●●○

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x (t^2 - 1) dt$.

- 6.1 Sans calculer $F(x)$, donner la valeur de $F(0)$ et justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F'(x) = x^2 - 1$. En déduire le tableau de variations de F sur $[-2; 3]$.
- 6.2 Déterminer l'expression de $F(x)$ pour tout réel x , puis vérifier que $F(1) = -\frac{2}{3}$. Compléter le tableau de variations de la question 6.1 par les valeurs de F .
- 6.3 Résoudre l'équation $F(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ (valeurs exactes).
- 6.4 Interpréter graphiquement, en termes d'aires, le fait que $F(\sqrt{3}) = 0$.

Exercice 7 La valeur moyenne

●●○

- 7.1 Calculer la valeur moyenne de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

a) $f(x) = 2x + 3$ sur $[1; 4]$ b) $f(x) = e^x$ sur $[0; 1]$

- 7.2 On considère maintenant la fonction g définie sur $[0; 4]$ par $g(x) = -x^2 + 4x$, représentée figure 3.

- a) Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine hachuré.
- b) En déduire la valeur moyenne μ de g sur $[0; 4]$ (valeur exacte, puis arrondi à 10^{-2}).
- c) Expliquer pourquoi le rectangle de base $[0; 4]$ et de hauteur μ , tracé en pointillés sur la figure, a exactement la même aire que le domaine hachuré.
- d) Résoudre l'équation $g(x) = \mu$ sur $[0; 4]$ (valeurs exactes, puis arrondies à 10^{-2}).

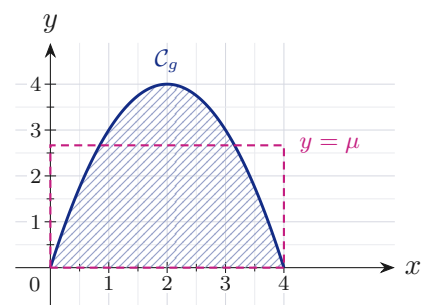


Figure 3 — Aire sous C_g et valeur moyenne

Exercice 8 L'aire entre deux courbes

●●○

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 2$. On note C_f et C_g leurs courbes dans un repère orthonormé d'unité 2 cm, et $\mathcal{D}$ le domaine compris entre ces deux courbes.

- 8.1 Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$: on note $\alpha < \beta$ ses deux solutions.
- 8.2 Étudier le signe de $g(x) - f(x)$ sur $\mathbb{R}$. En déduire la position relative de C_f et de C_g .
- 8.3 Calculer l'aire de $\mathcal{D}$ en unités d'aire, puis en cm^2 .
- 8.4 Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto g(x) - f(x)$ sur $[\alpha; \beta]$.

Exercice 9 La distance parcourue

●●○

Une voiture électrique démarre à l'instant $t = 0$. Sa vitesse, en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, est modélisée pour $t \geq 0$ (en secondes) par $v(t) = 30(1 - e^{-0,2t})$. On admet que la distance parcourue entre les instants t_1 et t_2 , en mètres, est égale à $\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.

- 9.1 Étudier les variations de v sur $[0; +\infty[$ et déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$. Interpréter cette limite dans le contexte, en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.
- 9.2 Vérifier que la fonction V définie par $V(t) = 30(t + 5e^{-0,2t})$ est une primitive de v sur $[0; +\infty[$.
- 9.3 Calculer la distance parcourue pendant les 20 s qui suivent le démarrage : valeur exacte, puis arrondi au mètre.
- 9.4 En déduire la vitesse moyenne de la voiture sur cet intervalle de temps (arrondie à 10^{-2}), puis la comparer à la vitesse atteinte à l'instant $t = 20$ s. Le résultat était-il prévisible ? Justifier.