

SECONDE · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 5

Fiche de cours Vecteurs

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur



R. RINGUET · 2026 - 2027

1 VECTEURS ET TRANSLATIONS

Définition. Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est déterminé par trois données : sa **direction** (celle de la droite (AB)), son **sens** (de A vers B) et sa **norme** $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$, la longueur du segment. La **translation** de vecteur $\vec{u}$ transforme un point M en l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Propriété. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que ces deux vecteurs ont même direction, même sens et même norme ; cela équivaut à : **$ABDC$ est un parallélogramme** (éventuellement aplati). Un même vecteur possède donc une infinité de représentants.

Notation. Le **vecteur nul** $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$ n'a ni direction ni sens ; sa norme est nulle. L'**opposé** de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$.

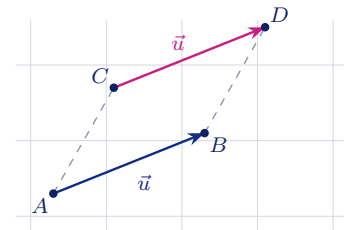


Figure 1 — $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$: $ABDC$ est un parallélogramme, et D est l'image de C par la translation de vecteur $\vec{u}$.

2 SOMME, DIFFÉRENCE, PRODUIT PAR UN RÉEL

Définition. La **somme** $\vec{u} + \vec{v}$ s'obtient en mettant les vecteurs « bout à bout » : **relation de Chasles**, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Avec la même origine, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ où $ABCD$ est un parallélogramme (règle du parallélogramme). La **différence** est $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$, et $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Définition. Pour k réel, $k\vec{u}$ est le vecteur de même direction que $\vec{u}$, de même sens si $k > 0$, de sens contraire si $k < 0$, et de norme $|k| \times \|\vec{u}\|$. On a $k\vec{u} = \vec{0}$ si, et seulement si, $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Définition. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ (ou $\vec{u} = k\vec{v}$). Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Propriété. (AB) et (CD) sont **parallèles** $\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. A, B, C sont **alignés** $\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

3 COORDONNÉES DANS UN REPÈRE

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

■ **FORMULAIRE** — Les formules à connaître, avec $\vec{u}(x; y)$, $\vec{v}(x'; y')$, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$; $\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y')$; $k\vec{u}(kx; ky)$.
- $\vec{u} = \vec{v} \iff x = x' \text{ et } y = y'$: une égalité de vecteurs équivaut à deux égalités de nombres.
- Milieu de $[AB]$: $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.
- Repère orthonormé : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

4 DÉTERMINANT ET COLINÉARITÉ

Définition. Le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ est le nombre $\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y$.

Théorème. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$, c'est-à-dire $xy' = x'y$ (**proportionnalité** des coordonnées).

Méthode — démontrer un alignement ou un parallélisme. calculer les coordonnées des deux vecteurs, puis leur déterminant : s'il est nul, les points sont alignés (ou les droites parallèles) ; sinon, ils ne le sont pas. Pour conclure que deux droites parallèles sont *distinctes*, vérifier qu'un point de l'une n'appartient pas à l'autre.

5 BASE DU PLAN ET CARACTÉRISATION DU MILIEU

Propriété. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, tout vecteur $\vec{w}$ du plan s'écrit d'une seule façon $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ avec a et b réels : on dit que $(\vec{u}; \vec{v})$ est une **base** du plan, et que $\vec{w}$ est une **combinaison** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriété — caractérisation vectorielle du milieu. I est le milieu de $[AB]$ $\iff \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

6 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Construire une somme, une différence, un multiple de vecteurs ; construire l'image d'un point ou d'une figure par une translation.
- Utiliser la relation de Chasles pour transformer une égalité vectorielle et placer un point défini par une relation.
- Calculer les coordonnées d'un vecteur, d'une somme, d'un multiple, d'un milieu ; calculer une norme et une distance en repère orthonormé.
- Calculer un déterminant et l'utiliser pour la colinéarité, l'alignement, le parallélisme, ou pour déterminer un paramètre inconnu.
- Décomposer un vecteur sur deux vecteurs non colinéaires, graphiquement puis par le calcul.
- Résoudre un problème de géométrie par la méthode vectorielle ou par la méthode repérée.

7 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — coordonnées, milieu, distance

Soit $A(-2; 1)$ et $B(4; 3)$ dans un repère orthonormé. Alors $\overrightarrow{AB}(4 - (-2); 3 - 1) = (6; 2)$, le milieu de $[AB]$ est $I(1; 2)$ et $AB = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

★ EXEMPLE — alignement par le déterminant

$A(-2; 1)$, $B(1; 3)$ et $C(7; 7)$: $\overrightarrow{AB}(3; 2)$ et $\overrightarrow{AC}(9; 6)$. Le déterminant vaut $3 \times 6 - 9 \times 2 = 0$: les points A , B et C sont alignés. Avec $D(4; 6)$, $\overrightarrow{AD}(6; 5)$ donne $3 \times 5 - 6 \times 2 = 3 \neq 0$: A , B et D ne sont pas alignés.

★ EXEMPLE — relation de Chasles

Pour placer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, on écrit $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$: on part de A , on suit $\overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{CB}$.

★ EXEMPLE — décomposition dans une base

Avec $\vec{u}(2; 1)$ et $\vec{v}(1; 3)$, le déterminant $2 \times 3 - 1 \times 1 = 5 \neq 0$: $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base. Cherchons a et b tels que $\vec{w}(7; 5) = a\vec{u} + b\vec{v}$: cela donne $2a + b = 7$ et $a + 3b = 5$, d'où $a = \frac{16}{5}$ et $b = \frac{3}{5}$.

✗ PIÈGES

- $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$: ces deux vecteurs sont opposés. Et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ correspond au parallélogramme $ABDC$, pas $ABCD$.
- Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$: « l'arrivée moins le départ », dans cet ordre.
- La formule $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ n'est valable que dans un repère **orthonormé**.
- Un déterminant nul signifie « colinéaires », donc *parallèles ou confondus* : l'alignement de trois points doit être conclu avec des vecteurs ayant une origine commune.
- Ne pas confondre le point $A(x; y)$ et le vecteur $\vec{u}(x; y)$: un point se place, un vecteur se translate.