

SECONDE • MATHÉMATIQUES • CHAPITRE 5



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 1 Vecteurs

Compléments : déterminant, combinaison de deux vecteurs, milieu, translation

5 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h · sans calculatrice

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Calculer le **déterminant** de deux vecteurs et l'utiliser pour la colinéarité, l'alignement, le parallélisme.
- Décomposer un vecteur sur deux vecteurs non colinéaires, par lecture graphique puis par le calcul.
- Utiliser les trois caractérisations du milieu d'un segment et placer un point défini par une relation vectorielle.
- Construire l'image d'une figure par une translation et enchaîner deux translations.

■ **RAPPEL** — Le formulaire de la feuille

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- **Déterminant** de $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$: $\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y$; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\iff \det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont **pas** colinéaires, tout vecteur $\vec{w}$ du plan s'écrit d'une seule façon $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ (a et b réels) : $(\vec{u}; \vec{v})$ est une **base** du plan.
- I est le milieu de $[AB]$ $\iff \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$; alors $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.
- **Translation** de vecteur $\vec{u}$: elle transforme M en l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Exercice 1 Déterminant, colinéarité, alignement

- 1.1** Calculer le déterminant des deux vecteurs, puis dire s'ils sont colinéaires; le cas échéant, écrire $\vec{v}$ sous la forme $k \vec{u}$.
- a) $\vec{u}(3; -2)$ et $\vec{v}(-6; 4)$ b) $\vec{u}(5; 2)$ et $\vec{v}(3; 1)$
- c) $\vec{u}(-4; 6)$ et $\vec{v}(2; -3)$ d) $\vec{u}(\frac{2}{3}; 1)$ et $\vec{v}(4; 6)$
- 1.2** Sur une carte quadrillée, quatre refuges sont situés aux points $A(-2; 1)$, $B(1; 3)$, $C(7; 7)$ et $D(4; 6)$. Les refuges A , B et C sont-ils alignés? Et les refuges A , B et D ? Justifier par un déterminant.
- 1.3** On donne $E(1; -1)$, $F(4; 1)$, $G(0; 2)$ et $H(6; 6)$. Démontrer que les droites (EF) et (GH) sont parallèles, puis qu'elles sont distinctes.
- 1.4** Déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u}(m; -3)$ et $\vec{v}(8; 6)$ soient colinéaires.

Exercice 2 Le milieu, de trois façons

On donne $A(-2; 1)$, $B(4; 3)$ et $C(6; -1)$.

- 2.1** Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$, puis vérifier par le calcul que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- 2.2** *Démonstration.* Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points quelconques et $I(x; y)$ le milieu de $[AB]$. En écrivant les coordonnées des deux membres de l'égalité $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, retrouver que $x = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y = \frac{y_A + y_B}{2}$.
- 2.3** Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Vérifier que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

- 2.4** Déterminer les coordonnées du point E , symétrique de A par rapport à B . On pourra traduire « B est le milieu de $[AE]$ » par une égalité vectorielle.

Exercice 3 Points définis par une relation vectorielle

●●○

On considère les points $A(-4; -2)$, $B(5; 1)$ et $C(2; 7)$.

- 3.1** Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$, puis vérifier que A , B et C ne sont pas alignés.
- 3.2** Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, puis celles du point F tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
- 3.3** Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{EF}$ et de $\overrightarrow{BC}$. En déduire que (EF) et (BC) sont parallèles.
- 3.4** Sans utiliser les coordonnées, démontrer la même propriété : en décomposant $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$, montrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
- 3.5** Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, puis comparer les longueurs AE , EG et GB .

Exercice 4 Décomposer un vecteur : lecture graphique et calcul

●●○

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ainsi que trois vecteurs $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ et $\vec{w}_3$, sont représentés sur la figure 1.

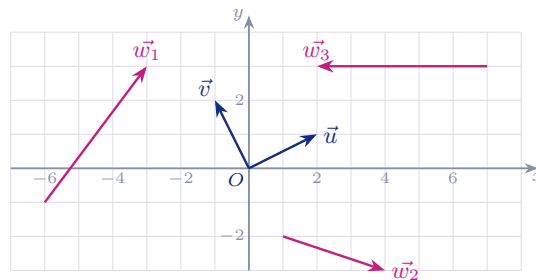


Figure 1 — Deux vecteurs de base et trois vecteurs à décomposer

- 4.1** Lire sur la figure les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ et $\vec{w}_3$. Calculer $\det(\vec{u}; \vec{v})$ et justifier que $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base du plan.
- 4.2** Par lecture graphique, exprimer chacun des vecteurs $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ et $\vec{w}_3$ sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$, où a et b sont des entiers ; vérifier ensuite chaque décomposition par un calcul de coordonnées.
- 4.3** Un palet est tiré par deux câbles dont les directions sont celles de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$. La force qui en résulte est représentée par le vecteur $\vec{F}(5; 10)$. Déterminer par le calcul les réels a et b tels que $\vec{F} = a\vec{u} + b\vec{v}$. On écrira les deux égalités de coordonnées, puis on exprimera b en fonction de a .
- 4.4** Reprendre la question précédente avec le vecteur $\vec{G}(-7; 4)$.

Exercice 5 Translations : un sprite dans un jeu vidéo

●●○

Dans un jeu vidéo, un motif (un « sprite ») est le triangle ABC avec $A(-2; 1)$, $B(0; -2)$ et $C(4; 0)$. On note t la translation de vecteur $\vec{u}(3; 2)$ et s la translation de vecteur $\vec{v}(-1; 4)$.

- 5.1** Déterminer les coordonnées des images A' , B' et C' des points A , B et C par la translation t .
- 5.2** Vérifier que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$, puis que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. Que peut-on en déduire pour les segments $[AB]$ et $[A'B']$?
- 5.3** On applique ensuite à A' la translation s : on obtient un point A'' . Calculer ses coordonnées, puis celles de $\overrightarrow{AA''}$. Par quelle translation unique passe-t-on directement de A à A'' ?
- 5.4** Démonstration. Soit M un point quelconque, M' son image par t et M'' l'image de M' par s . À l'aide de la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{MM''} = \vec{u} + \vec{v}$.
- 5.5** Le joueur part de $P(1; 1)$, applique 3 fois la translation t puis 2 fois la translation s . Déterminer les coordonnées du point d'arrivée, puis le vecteur de la translation qui le ramène en P .