

Approfondissement Vecteurs

Pour aller plus loin : propriétés du déterminant, bases du plan, centre de gravité, un problème en trois méthodes

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · sans calculatrice



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercice 1 Les propriétés du déterminant

●●●

Dans tout l'exercice, le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et l'on considère trois vecteurs $\vec{u}(x; y)$, $\vec{v}(x'; y')$ et $\vec{w}(x''; y'')$, ainsi qu'un réel k .

- 1.1 Démontrer que $\det(\vec{v}; \vec{u}) = -\det(\vec{u}; \vec{v})$, puis que $\det(\vec{u}; \vec{u}) = 0$. Retrouver ce dernier résultat sans calcul.
- 1.2 Démontrer que $\det(k\vec{u}; \vec{v}) = k \times \det(\vec{u}; \vec{v})$ et que $\det(\vec{u}; \vec{v} + \vec{w}) = \det(\vec{u}; \vec{v}) + \det(\vec{u}; \vec{w})$.
- 1.3 En déduire que, pour tout réel k , $\det(\vec{u}; \vec{v} + k\vec{u}) = \det(\vec{u}; \vec{v})$. Interpréter : que peut-on dire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v} + k\vec{u}$ vis-à-vis de la colinéarité avec $\vec{u}$?
- 1.4 Application : sans calculer de nouveau déterminant, dire si les vecteurs $\vec{a}(2; 5)$ et $\vec{b}(11; 29)$ sont colinéaires, sachant que $\vec{b} = \vec{c} + 3\vec{a}$ avec $\vec{c}(5; 14)$ et que $\det(\vec{a}; \vec{c}) = 3$.

Exercice 2 Une base du plan : existence et unicité

●●●

On donne $\vec{u}(2; 1)$ et $\vec{v}(1; 3)$.

- 2.1 Calculer $\det(\vec{u}; \vec{v})$ et justifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
- 2.2 Soit $\vec{w}(x; y)$ un vecteur quelconque du plan. Justifier que l'égalité $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ équivaut au système de deux équations $2a + b = x$ et $a + 3b = y$.
- 2.3 Calculer $3 \times (2a + b) - (a + 3b)$, puis $2 \times (a + 3b) - (2a + b)$. En déduire que $a = \frac{3x-y}{5}$ et $b = \frac{2y-x}{5}$.
- 2.4 Vérifier que ces valeurs conviennent, puis décomposer le vecteur $\vec{w}(4; -3)$ sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- 2.5 Unicité. On suppose que $a\vec{u} + b\vec{v} = a'\vec{u} + b'\vec{v}$. Démontrer que $(a - a')\vec{u} = (b' - b)\vec{v}$, puis, en raisonnant par l'absurde, que $a = a'$ et $b = b'$.
- 2.6 On remplace $\vec{v}$ par $\vec{v}'(6; 3)$. Démontrer qu'aucun couple $(a; b)$ ne permet d'écrire $\vec{w}(4; -3) = a\vec{u} + b\vec{v}'$, mais qu'il en existe une infinité pour $\vec{z}(4; 2)$. Quelle hypothèse a été perdue ?

Exercice 3 Aire d'un parallélogramme (hors programme — pour aller plus loin)

●●●

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On donne $\vec{u}(4; 1)$ et $\vec{v}(1; 3)$, et l'on note U, V et C les points tels que $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OV} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{u} + \vec{v}$.

- 3.1 Justifier que $OUCV$ est un parallélogramme, puis donner les coordonnées de C .
- 3.2 Le rectangle en pointillés a pour dimensions 5 et 4. Calculer son aire.
- 3.3 Le rectangle privé du parallélogramme est formé de deux triangles rectangles de côtés 4 et 1, de deux triangles rectangles de côtés 1 et 3, et de deux rectangles 1×1 . Calculer l'aire totale de ces six morceaux.

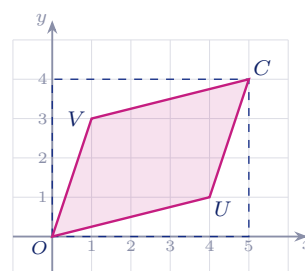


Figure 1 — Le parallélogramme $OUCV$ et le rectangle qui l'entoure

- 3.4 En déduire l'aire du parallélogramme $OUCV$, puis la comparer à $\det(\vec{u}; \vec{v})$: énoncer la conjecture.
- 3.5 Que devient cette aire si l'on remplace $\vec{v}$ par $\vec{v} + 2\vec{u}$? Justifier avec la question 1.3.

Exercice 4 Centre de gravité d'un triangle (hors programme — pour aller plus loin)

Soit $A(-1; -1)$, $B(7; 1)$ et $C(3; 9)$. On note A' , B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$; (AA') , (BB') et (CC') sont les médianes du triangle ABC .

- 4.1 Calculer les coordonnées de A' , B' et C' .
- 4.2 Soit G le point défini par $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$. À l'aide de la relation de Chasles, en écrivant $\vec{GB} = \vec{GA} + \vec{AB}$ et $\vec{GC} = \vec{GA} + \vec{AC}$, démontrer que $3\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AC}$. En déduire les coordonnées de G .
- 4.3 Démontrer que $\vec{AA'} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$, puis que $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$. Qu'en déduit-on pour le point G ?
- 4.4 Vérifier par le calcul que $\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BB'}$ et $\vec{CG} = \frac{2}{3}\vec{CC'}$. Quelle propriété des trois médianes vient-on d'établir?
- 4.5 Démontrer que, pour un triangle quelconque, G a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

Exercice 5 Un même alignement par trois méthodes

$ABCD$ est un parallélogramme. Le point E est le symétrique de B par rapport à C et le point F est le milieu de $[DC]$. On veut démontrer que les points A , F et E sont alignés.

Partie A — méthode repérée

On se place dans le repère où $A(0; 0)$, $B(4; 2)$ et $C(6; 6)$.

- 5.1 Déterminer les coordonnées de D , de E puis de F .
- 5.2 Calculer $\det(\vec{AF}; \vec{AE})$ et conclure.

Partie B — méthode vectorielle

- 5.3 Justifier que $\vec{BE} = 2\vec{AD}$, puis démontrer que $\vec{AE} = \vec{AB} + 2\vec{AD}$.
- 5.4 Démontrer de même que $\vec{AF} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB}$. En déduire que $\vec{AE} = 2\vec{AF}$ et conclure.

Partie C — méthode géométrique

- 5.5 Justifier que $\vec{AD} = \vec{CE}$, puis que $ACED$ est un parallélogramme. En considérant ses diagonales, démontrer que F est le milieu de $[AE]$.
- 5.6 Comparer les trois méthodes : laquelle se généralise le mieux à un parallélogramme quelconque?

Exercice 6 Un pavage du plan

Un motif est reproduit sur tout le plan : le centre d'une copie est un point M tel que $\vec{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$, où $\vec{u}(4; 1)$, $\vec{v}(1; 3)$ et où a et b sont des entiers relatifs.

- 6.1 Calculer $\det(\vec{u}; \vec{v})$ et justifier que $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base du plan.
- 6.2 Par la méthode de l'exercice 2, démontrer que, pour tout point $M(x; y)$, l'unique couple $(a; b)$ tel que $\vec{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ est $a = \frac{3x-y}{11}$, $b = \frac{4y-x}{11}$.
- 6.3 Le point $P(11; 11)$ est-il le centre d'une copie du motif? Et le point $Q(5; 5)$? Justifier.
- 6.4 À l'aide de la relation de Chasles, démontrer que la translation de vecteur $\vec{w}_1$ suivie de celle de vecteur $\vec{w}_2$ est la translation de vecteur $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$. En déduire que l'on passe du centre d'une copie au centre d'une autre par une translation de vecteur $a\vec{u} + b\vec{v}$ avec a et b entiers.