

Fiche de cours

Information chiffrée

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 PROPORTIONS ET POURCENTAGES

Définition. Soit E un ensemble fini de n_E éléments et A une partie de E de n_A éléments. La **proportion** (ou **fréquence**) de A dans E est

$$p = \frac{n_A}{n_E}, \quad \text{avec } 0 \leq p \leq 1.$$

On l'exprime en pourcentage en la multipliant par 100 : la proportion 0,28 vaut 28 %.

Propriété. Connaissant p et n_E , on retrouve $n_A = p \times n_E$; connaissant $p \neq 0$ et n_A , on retrouve $n_E = \frac{n_A}{p}$. Prendre 28 % d'une quantité, c'est la multiplier par 0,28.

Propriété — proportion d'une proportion. Si A est une partie de B et B une partie de E , alors

$$p_{A/E} = p_{A/B} \times p_{B/E} \quad (\text{les proportions se multiplient}).$$

Propriété — réunion. Si A et B sont deux parties de E , $p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}$; en particulier $p_A + p_{\bar{A}} = 1$. Deux proportions ne s'additionnent donc que si les parties sont **disjointes**.

2 ÉVOLUTION : TAUX ET COEFFICIENT MULTIPLICATEUR

Définition. Une grandeur passe d'une valeur initiale $V_I > 0$ à une valeur finale V_F . La **variation absolue** est la différence $V_F - V_I$; la **variation relative**, ou **taux d'évolution**, et le **coefficient multiplicateur** (CM) sont

$$t = \frac{V_F - V_I}{V_I}, \quad \text{CM} = \frac{V_F}{V_I} = 1 + t, \quad V_F = V_I \times (1 + t).$$

Propriété. Une **hausse** de $x\%$ correspond à $t = \frac{x}{100} > 0$ et à $\text{CM} = 1 + \frac{x}{100}$; une **baisse** de $x\%$ correspond à $t = -\frac{x}{100} < 0$ et à $\text{CM} = 1 - \frac{x}{100}$. La grandeur augmente si $\text{CM} > 1$, diminue si $\text{CM} < 1$, est inchangée si $\text{CM} = 1$.

Évolution	+5 %	+30 %	−4 %	−60 %
CM	1,05	1,3	0,96	0,4

CM	1,2	0,85	2	0,5
Taux	+20 %	−15 %	+100 %	−50 %

3 ÉVOLUTIONS SUCCESSIVES ET ÉVOLUTION RÉCIPROQUE

Propriété — évolutions successives. Lorsqu'une grandeur subit deux évolutions successives de taux t_1 puis t_2 , les **coefficients multiplicateurs se multiplient** : le CM global vaut $(1 + t_1)(1 + t_2)$ et le taux global t vérifie

$$1 + t = (1 + t_1)(1 + t_2), \quad \text{donc } t = (1 + t_1)(1 + t_2) - 1.$$

Pour n évolutions de même taux t_1 , le CM global vaut $(1 + t_1)^n$. **Les taux ne s'additionnent pas.**

Propriété — évolution réciproque. L'évolution qui ramène V_F à V_I (avec $V_F > 0$) est l'**évolution réciproque**. Son coefficient multiplicateur est l'**inverse** du premier :

$$\text{CM}' = \frac{1}{1 + t}, \quad \text{donc } t' = \frac{1}{1 + t} - 1, \quad \text{et } (1 + t)(1 + t') = 1.$$

Remarque. Une baisse de $x\%$ n'est pas annulée par une hausse de $x\%$: après -20% puis $+20\%$, le CM vaut $0,8 \times 1,2 = 0,96$, soit une baisse globale de 4 %.

4 INDICES (HORS PROGRAMME — POUR ALLER PLUS LOIN)

Définition. On choisit une valeur $V_0 > 0$ prise pour **référence** (année de base), à laquelle on attribue l'**indice** 100. L'indice d'une valeur V est alors

$$I = 100 \times \frac{V}{V_0}, \quad \text{et réciproquement } V = V_0 \times \frac{I}{100}.$$

Propriété. L'indice I se lit directement comme une évolution depuis l'année de base : $I = 112$ signifie $+12\%$, $I = 93$ signifie -7% . Les indices permettent de comparer facilement les évolutions de plusieurs grandeurs exprimées dans des unités différentes.

■ FORMULAIRE — Tout le chapitre en cinq lignes

- Proportion : $p = \frac{n_A}{n_E}$; $n_A = p \times n_E$; $n_E = \frac{n_A}{p}$; proportion de proportion : $p = p_1 \times p_2$.
- Évolution : $t = \frac{V_F - V_I}{V_I}$; $CM = 1 + t = \frac{V_F}{V_I}$; $V_F = V_I(1 + t)$; $V_I = \frac{V_F}{1 + t}$.
- Évolutions successives : $CM = CM_1 \times CM_2$; n fois le même taux t_1 : $CM = (1 + t_1)^n$.
- Évolution réciproque : $CM' = \frac{1}{CM}$; (pour aller plus loin) indice base 100 : $I = 100 \times \frac{V}{V_0}$.
- Hausse de $x\%$: $\times \left(1 + \frac{x}{100}\right)$. Baisse de $x\%$: $\times \left(1 - \frac{x}{100}\right)$. Prendre $x\%$: $\times \frac{x}{100}$.

5 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

➤ SAVOIR-FAIRE

- Calculer une proportion, l'exprimer en pourcentage, retrouver un effectif ou un effectif total.
- Calculer une proportion de proportion et une proportion sur une réunion de deux parties.
- Passer du taux d'évolution au coefficient multiplicateur et inversement; calculer V_F , V_I ou t connaissant les deux autres.
- Déterminer le taux global de deux (ou n) évolutions successives, et le taux de l'évolution réciproque.
- (Pour aller plus loin) Calculer un indice base 100, l'interpréter comme une évolution, comparer deux séries à l'aide de leurs indices.

6 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — proportion de proportion

Dans un lycée, 62% des élèves sont demi-pensionnaires et, *parmi eux*, 45% font une langue ancienne. La proportion d'élèves du lycée qui sont demi-pensionnaires et font une langue ancienne vaut $0,62 \times 0,45 = 0,279$, soit $27,9\%$.

★ EXEMPLE — évolutions successives

Un loyer augmente de 35% puis diminue de 10% . Le CM global vaut $1,35 \times 0,90 = 1,215$: la hausse globale est de $21,5\%$, et non de $35 - 10 = 25\%$.

★ EXEMPLE — évolution réciproque

Un prix a augmenté de 25% . Pour revenir au prix initial, il faut appliquer le CM $\frac{1}{1,25} = 0,8$, c'est-à-dire une baisse de 20% (et non de 25%).

★ EXEMPLE — évolution répétée et indice

Une population augmente de 6% par an pendant 5 ans : le CM global vaut $1,06^5 \approx 1,338$, soit environ $+33,8\%$ (et non $5 \times 6 = 30\%$). Une autre population passe de 250 à 290 milliers d'habitants depuis l'année de base : l'indice vaut $100 \times \frac{290}{250} = 116$, soit $+16\%$.

✗ PIÈGES

- Additionner les taux d'évolutions successives : ce sont les *coefficients multiplicateurs* qui se multiplient.
- Croire qu'une hausse de $x\%$ est annulée par une baisse de $x\%$: l'évolution réciproque a pour CM $\frac{1}{1+t}$.
- Confondre « augmenter de 20% » (multiplier par 1,2) et « être égal à 20% de » (multiplier par 0,2).
- Additionner deux proportions calculées sur des ensembles de référence différents, ou sur des parties qui se recouvrent.
- Confondre une variation en *points* de pourcentage (de 15% à 18% : $+3$ points) et le taux d'évolution correspondant ($+20\%$).