

Fiche de cours Droites du plan

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur



R. RINGUET · 2026 - 2027

Dans toute la fiche, le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 VECTEUR DIRECTEUR ET ÉQUATION CARTÉSIENNE

Définition. Un **vecteur directeur** d'une droite d est un vecteur non nul $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ pour deux points A et B de d . Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.

Propriété. La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires, c'est-à-dire $\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$.

Théorème. Toute droite admet une **équation cartésienne** de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$. Réciproquement, l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant $ax + by + c = 0$ est une droite, dont $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur.

Remarque. Une équation cartésienne n'est pas unique : $2x - 4y + 6 = 0$ et $x - 2y + 3 = 0$ décrivent la même droite. Un point appartient à la droite si, et seulement si, ses coordonnées vérifient l'équation.

2 ÉQUATION RÉDUITE, COEFFICIENT DIRECTEUR

Propriété. Si $b \neq 0$, l'équation $ax + by + c = 0$ s'écrit $y = mx + p$: c'est l'**équation réduite** de la droite, avec $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$. Si $b = 0$, la droite est **parallèle à l'axe des ordonnées** : son équation réduite est de la forme $x = k$, sans coefficient directeur.

Définition. Dans $y = mx + p$, le réel m est le **coefficient directeur** (ou pente) et p l'**ordonnée à l'origine** : la droite coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; p)$. Un vecteur directeur est $\vec{u}(1; m)$: quand on avance de 1 vers la droite, on monte de m .

Propriété — coefficient directeur par deux points. Si A et B appartiennent à d avec $x_A \neq x_B$, alors

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

La droite est la représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto mx + p$: cette fonction est croissante si $m > 0$, décroissante si $m < 0$, constante si $m = 0$ (droite horizontale).

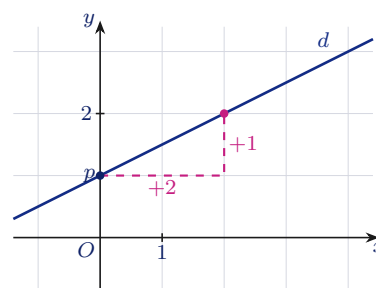


Figure 1 — Lecture graphique : $p = 1$ et $m = \frac{1}{2}$ (on monte de 1 quand on avance de 2), donc $d : y = \frac{1}{2}x + 1$.

3 DÉTERMINER L'ÉQUATION D'UNE DROITE

Méthode — à partir de deux points A et B . si $x_A = x_B$, la droite est verticale d'équation $x = x_A$. Sinon, calculer $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, puis déterminer p en remplaçant x et y par les coordonnées de A dans $y = mx + p$.

Méthode — à partir d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta)$. écrire $\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$, soit $(x - x_A)\beta - (y - y_A)\alpha = 0$, puis développer pour obtenir $ax + by + c = 0$. On peut aussi partir de $ax + by + c = 0$ avec $\vec{u}(-b; a)$ et calculer c à l'aide de A .

4 POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES

Propriété. Deux droites sont **parallèles** si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont colinéaires, c'est-à-dire, avec les équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, lorsque $ab' - a'b = 0$. Avec des équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$, elles sont parallèles si, et seulement si, $m = m'$; elles sont alors confondues si $p = p'$, strictement parallèles sinon.

Propriété. Deux droites non parallèles sont **sécantes** : elles ont un unique point d'intersection.

Méthode — déterminer le point d'intersection. avec deux équations réduites, résoudre $mx + p = m'x + p'$ pour obtenir l'abscisse du point, puis reporter dans l'une des équations pour l'ordonnée. Si l'une des droites est verticale ($x = k$), reporter directement $x = k$ dans l'autre équation.

■ FORMULAIRE — Le formulaire du chapitre

- Équation cartésienne : $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$; vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$.
- Équation réduite : $y = mx + p$ (droite non verticale); vecteur directeur $\vec{u}(1; m)$; $x = k$ pour une droite verticale.
- Coefficient directeur par deux points : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (avec $x_A \neq x_B$).
- Parallélisme : $m = m'$, ou $ab' - a'b = 0$, ou vecteurs directeurs colinéaires.

5 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

➤ SAVOIR-FAIRE

- Lire sur un graphique le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine, puis écrire l'équation réduite d'une droite.
- Tracer une droite à partir de son équation, ou à partir d'un point et de son coefficient directeur.
- Déterminer l'équation d'une droite passant par deux points, y compris dans le cas d'une droite verticale.
- Passer d'une équation cartésienne à l'équation réduite et lire un vecteur directeur.
- Tester l'appartenance d'un point à une droite, calculer les coordonnées d'un point d'abscisse ou d'ordonnée donnée.
- Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes, et calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

6 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — équation par deux points

Soit $A(-1; 5)$ et $B(3; -3)$. Le coefficient directeur vaut $m = \frac{-3 - 5}{3 - (-1)} = \frac{-8}{4} = -2$. Avec $A : 5 = -2 \times (-1) + p$, donc $p = 3$ et $d : y = -2x + 3$. Une équation cartésienne est $2x + y - 3 = 0$.

★ EXEMPLE — cartésienne, vecteur directeur, appartenance

La droite $d' : 3x - 2y + 4 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(2; 3)$ et pour équation réduite $y = \frac{3}{2}x + 2$. Le point $E(2; 5)$ vérifie $3 \times 2 - 2 \times 5 + 4 = 0$: il appartient à d' . Le point $F(1; 1)$ donne $3 - 2 + 4 = 5 \neq 0$: il n'y appartient pas.

★ EXEMPLE — positions relatives

$d_1 : y = -2x + 3$ et $d_2 : 4x + 2y - 7 = 0$, soit $y = -2x + \frac{7}{2}$: coefficients directeurs égaux et ordonnées à l'origine différentes, donc d_1 et d_2 sont strictement parallèles. En revanche $d_3 : y = x - 3$ a un coefficient directeur différent : d_1 et d_3 sont sécantes. On résout $-2x + 3 = x - 3$, soit $3x = 6$ et $x = 2$; alors $y = 2 - 3 = -1$: le point d'intersection est $(2; -1)$.

★ EXEMPLE — droite verticale, points particuliers

La droite passant par $G(4; -1)$ et $H(4; 3)$ est verticale : son équation est $x = 4$. Sur $d_1 : y = -2x + 3$, le point d'abscisse 5 a pour ordonnée -7 ; le point d'ordonnée 0 vérifie $-2x + 3 = 0$, donc d_1 coupe l'axe des abscisses en $(\frac{3}{2}; 0)$.

✗ PIÈGES

- Une droite verticale n'a pas de coefficient directeur : son équation est $x = k$, et non $y = k$.
- Dans $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, les différences se prennent dans le même ordre au numérateur et au dénominateur.
- Pour $ax + by + c = 0$, un vecteur directeur est $\vec{u}(-b; a)$: les coefficients sont échangés et l'un change de signe.
- Deux droites de même coefficient directeur peuvent être confondues : comparer aussi les ordonnées à l'origine.
- Un point d'intersection est un couple de coordonnées : il faut calculer x et y , puis vérifier dans les deux équations.