

SECONDE · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 2

Fiche de cours Arithmétique

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur



R. RINGUET · 2026 - 2027

Dans toute la fiche, les lettres a, b, k, n, q, r désignent des nombres **entiers**.

1 MULTIPLES ET DIVISEURS

Définition. a est un **multiple** de b lorsqu'il existe un entier k tel que $a = kb$. On dit alors aussi que b est un **diviseur** de a , que b **divise** a , ou que a est **divisible** par b .

Remarque. 0 est un multiple de tout entier, et tout entier est un multiple de 1 et de lui-même. Un entier b non nul n'a qu'un nombre fini de diviseurs, mais une infinité de multiples : $\dots, -2b, -b, 0, b, 2b, \dots$

Propriété — à savoir démontrer. La somme et la différence de deux multiples de a sont des multiples de a . *Démonstration :* si $x = ka$ et $y = k'a$, alors $x + y = (k + k')a$ et $x - y = (k - k')a$, où $k + k'$ et $k - k'$ sont des entiers. De même, si b divise a et a divise c , alors b divise c .

Remarque — rappel du collège. Un entier naturel est **premier** lorsqu'il a exactement deux diviseurs positifs, 1 et lui-même : 2, 3, 5, 7, 11, 13... (1 n'est pas premier). Tout entier naturel $n \geq 2$ se décompose en un produit de facteurs premiers, de façon unique à l'ordre près : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

■ FORMULAIRE — Critères de divisibilité

- Par 2 : le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8. Par 5 : il est 0 ou 5. Par 10 : il est 0.
- Par 4 : le nombre formé par les deux derniers chiffres est un multiple de 4. Par 25 : il est un multiple de 25.
- Par 3 : la somme des chiffres est un multiple de 3. Par 9 : la somme des chiffres est un multiple de 9.

2 DIVISION EUCLIDIENNE

Théorème. Pour tout entier a et tout entier $b > 0$, il existe un unique couple d'entiers $(q; r)$ tel que

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b.$$

q est le **quotient** et r le **reste** de la division euclidienne de a par b .

Propriété. a est un multiple de b si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de a par b est nul. Les entiers de reste r dans la division par b sont exactement les entiers de la forme $bk + r$.

3 NOMBRES PAIRS ET IMPAIRS

Définition. Un entier n est **pair** lorsqu'il s'écrit $n = 2k$ avec k entier, **impair** lorsqu'il s'écrit $n = 2k + 1$. Tout entier est soit pair, soit impair, selon que le reste de sa division euclidienne par 2 vaut 0 ou 1.

Propriété — à savoir démontrer. Le carré d'un entier impair est impair. *Démonstration :* si $n = 2k + 1$, alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, qui est de la forme $2k' + 1$ avec $k' = 2k^2 + 2k$ entier.

Remarque. On démontre de la même façon : la somme de deux entiers pairs est paire, la somme de deux entiers impairs est paire, le produit de deux entiers impairs est impair.

4 RAISONNER ET DÉMONTRER

Définition. Une **implication** « si P alors Q » se note $P \Rightarrow Q$. Sa **réciroque** est « si Q alors P ». Sa **contraposée** est « si Q est fausse, alors P est fausse » : une implication et sa contraposée sont **toujours** vraies en même temps. Lorsque $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies, on écrit $P \Leftrightarrow Q$.

Méthode — démontrer ou réfuter. Pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tous les entiers, on part de l'écriture générale ($n = 2k, n = 2k + 1, a = kb \dots$) et on calcule. Pour démontrer qu'elle est fausse, il suffit d'un seul **contre-exemple**.

Propriété — un exemple de contraposée. « Si n^2 est pair, alors n est pair » se démontre par contraposée : si n est impair, alors n^2 est impair (propriété du bloc 3).

5 FRACTIONS ET ÉCRITURE IRRÉDUCTIBLE

Définition. Une fraction $\frac{a}{b}$ (avec $b \neq 0$) est **irréductible** lorsque a et b n'ont pas d'autre diviseur commun positif que 1.

Méthode — rendre une fraction irréductible. simplifier successivement par les diviseurs communs repérés grâce aux critères de divisibilité, jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus; ou décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers, puis supprimer les facteurs communs.

Remarque. Deux fractions sont égales si, et seulement si, elles ont la même écriture irréductible à dénominateur positif. C'est la forme dans laquelle on donne tout résultat fractionnaire.

6 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Reconnaître un multiple, un diviseur; utiliser les critères de divisibilité; dresser la liste des diviseurs d'un entier.
- Poser une division euclidienne, en donner le quotient et le reste, et l'utiliser pour un problème de partage ou de périodicité.
- Écrire un entier pair sous la forme $2k$, un entier impair sous la forme $2k + 1$, et démontrer une propriété de parité.
- Rédiger une démonstration simple (somme de deux multiples, carré d'un impair), utiliser une contraposée, réfuter par un contre-exemple.
- Rendre une fraction irréductible et comparer deux fractions.
- Écrire un programme court testant la divisibilité ou parcourant les multiples d'un entier.

7 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — division euclidienne

Division de 2 026 par 7 : $7 \times 289 = 2 023$ et $2 026 - 2 023 = 3$, donc $2 026 = 7 \times 289 + 3$ avec $0 \leq 3 < 7$. Le quotient est 289, le reste 3 : 2 026 n'est pas un multiple de 7. Le plus grand multiple de 7 inférieur à 2 026 est 2 023.

★ EXEMPLE — une démonstration

Montrons que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3. Ces entiers s'écrivent $n, n + 1, n + 2$; leur somme vaut $3n + 3 = 3(n + 1)$, produit de 3 par l'entier $n + 1$: c'est bien un multiple de 3.

★ EXEMPLE — fraction irréductible

$\frac{2\,520}{1\,764}$: les deux nombres sont pairs, puis divisibles par 2 encore, puis par 9 et enfin par 7. On obtient successivement $\frac{1\,260}{882}$, $\frac{630}{441}$, $\frac{70}{49}$, puis $\frac{10}{7}$, irréductible.

★ EXEMPLE — contre-exemple

« Tout entier impair est un multiple de 3 » est faux : 5 est impair et n'est pas un multiple de 3. Un seul contre-exemple suffit à réfuter l'affirmation.

Méthode — deux algorithmes du chapitre. le premier teste si a est un multiple de b (pour $b \neq 0$), le second renvoie le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b (pour $a > 0$ et $b \geq 0$).

```

1 def est_multiple(a, b):
2     return a % b == 0
3
4 def plus_grand_multiple(a, b):
5     m = 0
6     while m + a <= b:
7         m = m + a
8     return m

```

✗ PIÈGES

- Ne pas confondre multiple et diviseur : 12 est un multiple de 3, et 3 est un diviseur de 12.
- Dans une division euclidienne, le reste vérifie toujours $0 \leq r < b$: « $17 = 5 \times 2 + 7$ » n'en est pas une.
- Vérifier une propriété sur trois exemples ne la démontre pas; à l'inverse, un seul contre-exemple suffit à la réfuter.
- La réciproque d'une implication vraie peut être fausse : « si n est un multiple de 4 alors n est pair » est vraie, sa réciproque est fausse (6).
- Pour deux entiers pairs quelconques, on écrit $2k$ et $2k'$ avec deux lettres différentes : $2k$ et $2k + 1$, avec le même k , désignent deux entiers consécutifs, pas un pair et un impair quelconques.