

SECONDE · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 2

Exercices 2 Arithmétique

Application : problèmes de multiples et de diviseurs, démonstrations guidées, disjonction de cas, algorithmes

6 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h · sans calculatrice



R. RINGUET · 2026 – 2027

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Modéliser un problème concret par une division euclidienne, par des multiples communs ou par des diviseurs communs.
- Rédiger une démonstration arithmétique en introduisant une écriture du type $a = kb$, $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$; raisonner par disjonction de cas ; conjecturer, démontrer ou réfuter par un contre-exemple.
- Lire, compléter et anticiper le résultat d'un programme Python portant sur les multiples et les diviseurs.

Exercice 1 Sièges et calendrier

●●○

- 1.1** La salle d'un théâtre compte 437 fauteuils disposés en rangées de 24, la dernière rangée pouvant être incomplète. Ils sont numérotés de 1 à 437 rangée par rangée : la rangée 1 porte les numéros 1 à 24, la rangée 2 les numéros 25 à 48, etc.
- Déterminer le nombre de rangées et le nombre de fauteuils de la dernière rangée.
 - Dans quelle rangée, et à quelle place de cette rangée, se trouve le fauteuil n° 293 ?
- 1.2** Le 1^{er} janvier 2026 est un jeudi et l'année 2026 n'est pas bissextile.
- Combien de jours séparent le 1^{er} janvier du 1^{er} mars 2026 ? En déduire, par une division euclidienne par 7, le jour de la semaine du 1^{er} mars 2026.
 - Quel jour de la semaine sera le 300^e jour de l'année 2026 ?

Exercice 2 Les feux du carrefour

●●○

Deux panneaux lumineux clignotent à un carrefour : le premier toutes les 12 secondes, le second toutes les 18 secondes. Ils s'allument ensemble à 8 h 00 min 00 s.

- 2.1** Citer les cinq premiers multiples strictement positifs de 12, puis ceux de 18. En déduire le premier instant, après 8 h 00 min 00 s, où les deux panneaux s'allument de nouveau ensemble.
- 2.2** Combien de fois les deux panneaux s'allumeront-ils ensemble entre 8 h 00 min 00 s (exclu) et 9 h 00 min 00 s (inclus) ?
- 2.3** Un troisième panneau, qui s'allume toutes les 8 secondes, est mis en service au même instant. Déterminer le premier instant où les trois panneaux s'allument ensemble.
- 2.4** Le technicien souhaite que les trois panneaux s'allument ensemble toutes les 3 minutes exactement, en ne modifiant que le réglage du troisième panneau : proposer une durée possible. Serait-ce réalisable pour une coïncidence toutes les 2 minutes ? Justifier.

Exercice 3 Des lots identiques

●●○

- 3.1** Un professeur documentaliste dispose de 84 stylos et de 126 marque-pages. Il constitue des lots identiques en utilisant tous les objets : chaque lot contient le même nombre de stylos et le même nombre de marque-pages.
- Justifier que le nombre de lots est un diviseur commun de 84 et de 126, puis dresser la liste de tous les nombres de lots possibles.
 - Déterminer le nombre maximal de lots réalisables et la composition d'un lot dans ce cas.

- 3.2** Une fleuriste prépare des bouquets identiques avec 120 roses et 156 tulipes, sans qu'il reste de fleur. Déterminer le nombre maximal de bouquets, puis la composition d'un bouquet. Quelle fraction des fleurs d'un bouquet les roses représentent-elles ? On la donnera sous forme irréductible.

Exercice 4 Démontrer, conjecturer, réfuter



Dans tout l'exercice, n désigne un entier.

- 4.1** **Le carré d'un nombre impair est impair.** Vérifier cette propriété sur 7, 11 et 2025. On suppose ensuite n impair : il existe donc un entier k tel que $n = 2k + 1$. Développer $(2k + 1)^2$, l'écrire sous la forme $2K + 1$ où K est un entier exprimé en fonction de k , puis conclure.
- 4.2** **Le produit de deux entiers consécutifs est pair.** Démontrer cette propriété en distinguant les deux cas : n pair, puis n impair. En déduire que $n^2 + n + 1$ est impair pour tout entier n .
- 4.3** **La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.** Démontrer cette propriété. La somme de quatre entiers consécutifs est-elle un multiple de 4 ? Justifier.
- 4.4** On pose $N = n^2 - n$. Calculer N pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6. Émettre une conjecture sur la parité de N , puis la démontrer à l'aide de la question 4.2.
- 4.5** Sarah affirme : « La somme de deux nombres impairs est impaire. » Réfuter cette affirmation par un contre-exemple, puis énoncer et démontrer l'affirmation correcte.
- 4.6** Démontrer que tout nombre impair est la différence des carrés de deux entiers consécutifs, puis écrire 2025 sous la forme $a^2 - b^2$ avec a et b entiers consécutifs.

Exercice 5 Raisonner par disjonction de cas



Soit n un entier naturel.

- 5.1** Justifier que le reste de la division euclidienne de n par 3 vaut 0, 1 ou 2, et donc que n s'écrit $3k$, $3k + 1$ ou $3k + 2$ avec k entier.
- 5.2** Démontrer que le produit $n(n + 1)(n + 2)$ est toujours un multiple de 3.
- 5.3** Démontrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 3 vaut 0 ou 1. En déduire que $n^2 + 1$ n'est jamais un multiple de 3.
- 5.4** On suppose maintenant que n n'est pas un multiple de 5 : n s'écrit alors $5k + r$ avec $r \in \{1; 2; 3; 4\}$. Démontrer que $n^2 - 1$ ou $n^2 + 1$ est un multiple de 5.

Exercice 6 Deux programmes Python



En Python, $a \% b$ désigne le reste de la division euclidienne de a par b (pour $b > 0$; $a \% 0$ provoque une erreur).

```
1 def est_multiple(a, b):
2     if a % b == ... :
3         return True
4     else:
5         return False
```

```
1 def grand_multiple(a, b):
2     m = 0
3     while m + a <= b:
4         m = ...
5     return m
```

- 6.1** La fonction `est_multiple` doit renvoyer `True` lorsque a est un multiple de b . Recopier et compléter la ligne 2, puis donner les valeurs renvoyées par `est_multiple(91, 7)` et `est_multiple(2026, 12)`.
- 6.2** La fonction `grand_multiple` doit renvoyer le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b (avec $a > 0$ et $b \geq 0$). Recopier et compléter la ligne 4, puis donner `grand_multiple(7, 100)` et `grand_multiple(12, 2026)`.
- 6.3** Écrire une fonction `nb_diviseurs(n)` qui renvoie le nombre de diviseurs positifs de l'entier $n > 0$, en parcourant tous les entiers d de 1 à n avec une boucle `for`. Que renvoie `nb_diviseurs(36)` ?
- 6.4** Expliquer pourquoi `nb_diviseurs(n)` renvoie 2 exactement lorsque n est premier, et en déduire une fonction `est_premier(n)`.