

SECONDE · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 2

Approfondissement Arithmétique

Pour aller plus loin : nombres parfaits, critère de divisibilité par 9 démontré, restes et horloges, PGCD par soustractions, nombres premiers

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · sans calculatrice



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercice 1 Les nombres parfaits

●●●

Un entier $n \geq 2$ est dit *parfait* lorsqu'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs **autres que lui-même** ; il est dit *déficient* si cette somme est plus petite que n , et *abondant* si elle est plus grande.

- 1.1 Vérifier que 6 et 28 sont parfaits, que 8 est déficient et que 12 est abondant.
- 1.2 Vérifier que $2^5 - 1 = 31$ est premier, puis que $2^4 \times 31 = 496$ est un nombre parfait.
- 1.3 **Une construction d'Euclide.** Soit p un entier supérieur ou égal à 2 tel que $q = 2^p - 1$ soit premier, et soit $n = 2^{p-1}q$.
 - a) Justifier que les diviseurs positifs de n sont les $2p$ nombres $1, 2, \dots, 2^{p-1}$ et $q, 2q, \dots, 2^{p-1}q$.
 - b) Démontrer que $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{p-1} = 2^p - 1$. (On pourra calculer $2S - S$ où S désigne cette somme.)
 - c) En déduire que la somme de tous les diviseurs de n autres que n vaut n : le nombre n est donc parfait.
- 1.4 Appliquer ce résultat à $p = 7$ (on admettra que 127 est premier) et donner le nombre parfait obtenu.

Exercice 2 Démontrer le critère de divisibilité par 9

●●●

Soit $N = \overline{abcd}$ un entier de quatre chiffres : $N = 1\,000a + 100b + 10c + d$. On note $S = a + b + c + d$ la somme de ses chiffres.

- 2.1 Vérifier que 9, 99 et 999 sont des multiples de 9.
- 2.2 Démontrer que $N - S = 999a + 99b + 9c$, puis que $N - S$ est un multiple de 9.
- 2.3 En déduire que N est un multiple de 9 si et seulement si S en est un. (On utilisera que la somme et la différence de deux multiples de 9 sont des multiples de 9.)
- 2.4 Adapter la démonstration pour obtenir le critère de divisibilité par 3.
- 2.5 Déterminer tous les chiffres x tels que le nombre $\overline{4x72}$ soit divisible par 9, puis tous les chiffres x tels qu'il soit divisible par 3.
- 2.6 **(hors programme)** On pose $A = d - c + b - a$. Démontrer que $N - A = 1\,001a + 99b + 11c$; en remarquant que $1\,001 = 11 \times 91$, en déduire un critère de divisibilité par 11, puis le tester sur 8 591 et 2 026.

Exercice 3 Restes, horloges et chiffre des unités

●●●

- 3.1 Aujourd'hui est un mardi. Quel jour de la semaine sera-t-on dans 100 jours ? dans 2 026 jours ? Justifier par une division euclidienne.
- 3.2 Il est 9 heures sur une horloge à 12 heures. Quelle heure indiquera-t-elle dans 2 026 heures ?
- 3.3 Calculer $7^1, 7^2, 7^3, 7^4$ et 7^5 , puis conjecturer le chiffre des unités de 7^n selon le reste de la division euclidienne de n par 4. En admettant cette conjecture, en déduire le chiffre des unités de 7^{2026} , puis déterminer de même celui de 3^{100} .
- 3.4 **Reste dans la division par 3.** On admet que le reste d'un produit ab est celui du produit des restes de a et de b . Déterminer le reste de $2^2, 2^3$ et 2^4 dans la division par 3, puis conjecturer le reste de 2^n selon la parité de n . Démontrer cette conjecture en écrivant $2^{n+2} = 4 \times 2^n$, puis donner le reste de 2^{2026} .

Exercice 4 Le PGCD par soustractions successives



Pour deux entiers naturels non nuls a et b , on note $\text{PGCD}(a, b)$ leur plus grand diviseur commun.

- 4.1** Soit $a > b$ deux entiers naturels non nuls et d un entier. Démontrer que si d divise a et b alors d divise $a - b$, et réciproquement que si d divise $a - b$ et b alors d divise a . En déduire que $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a - b, b)$.
- 4.2** Appliquer cette égalité de façon répétée pour calculer $\text{PGCD}(252, 180)$, en présentant les couples successifs.
- 4.3** Calculer de même $\text{PGCD}(1\,001, 429)$, puis rendre la fraction $\frac{1\,001}{429}$ irréductible.

```

1 def pgcd(a, b):
2     while a != b:
3         if a > b:
4             a = ...
5         else:
6             b = ...
7     return a

```

- 4.4** Le programme ci-contre met en œuvre cette méthode. Recopier et compléter les lignes 4 et 6, puis indiquer le nombre de passages dans la boucle pour `pgcd(252, 180)`.
- 4.5** Que se passerait-il si l'on appelait `pgcd(12, 0)` ? Pourquoi impose-t-on $a > 0$ et $b > 0$?

Exercice 5 Autour des nombres premiers



- 5.1** Dresser la liste des nombres premiers inférieurs à 60, puis celle des *nombres premiers jumeaux* inférieurs à 60, c'est-à-dire des couples de nombres premiers dont la différence vaut 2.
- 5.2** Démontrer que le seul nombre premier pair est 2, puis que 3 est le seul nombre premier p tel que $p, p + 2$ et $p + 4$ soient tous les trois premiers. (On pourra remarquer que l'un de ces trois nombres est toujours un multiple de 3, en raisonnant selon le reste de p dans la division par 3.)
- 5.3** **Conjecture de Goldbach (hors programme — pour aller plus loin).** Elle affirme que tout entier pair supérieur ou égal à 4 est somme de deux nombres premiers; nul n'a su la démontrer à ce jour. La vérifier pour 48 et 100, en donnant toutes les décompositions possibles.
- 5.4** **Théorème d'Euclide (hors programme) : il existe une infinité de nombres premiers.** On suppose par l'absurde que $p_1, \dots, p_n$ sont tous les nombres premiers et on pose $N = p_1 \times \dots \times p_n + 1$. Démontrer qu'aucun des p_i ne divise N (considérer le reste de N dans la division par p_i), puis conclure, en admettant que tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier. Ce raisonnement prouve-t-il que N est premier ? Calculer N pour 2, 3, 5, 7, 11, 13 et vérifier que $N = 59 \times 509$.

Exercice 6 Quelles fractions sont des nombres décimaux ?



On rappelle qu'un nombre *décimal* est un nombre qui s'écrit $\frac{k}{10^p}$ avec k entier relatif et p entier naturel.

- 6.1** Soit $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible avec $b = 2^m \times 5^n$. En multipliant numérateur et dénominateur par une puissance de 2 ou de 5 bien choisie, démontrer que $\frac{a}{b}$ est décimal; illustrer avec $\frac{7}{40}$ et $\frac{3}{25}$.
- 6.2** En admettant la réciproque, déterminer lesquelles des fractions $\frac{7}{56}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{9}{75}$ et $\frac{6}{45}$ sont des nombres décimaux, et donner l'écriture décimale de celles qui le sont.
- 6.3** Poser la division de 1 par 7 et écrire les six premiers restes obtenus : que constate-t-on ? En déduire l'écriture décimale de $\frac{1}{7}$. Justifier enfin qu'un reste dans la division par 7 ne prend que 7 valeurs, donc que l'écriture décimale de $\frac{n}{7}$ est toujours périodique, de période au plus 6.