

Fiche de cours

Optique géométrique

Lois de Snell-Descartes, réflexion totale, miroir plan, lentilles minces, œil et appareil photographique

définitions · méthodes · constructions · démonstrations exigibles · pièges

1 LUMIÈRE, SOURCES, COULEUR, ET LE MODÈLE DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Définition. Une **source ponctuelle monochromatique** est une source de dimension négligeable émettant une onde d'une seule fréquence ν ; sa **longueur d'onde dans le vide** est $\lambda_0 = c/\nu$. Dans un milieu d'indice n , la fréquence est inchangée et $\lambda = \lambda_0/n$.

Notation. Le **spectre** d'une source est la répartition de son intensité en fonction de λ_0 : spectre de **raies** (lampe spectrale, laser), **continu** (corps chauffé, soleil) ou **de bandes**. Le visible va de 400 nm (violet) à 800 nm (rouge), par le bleu (≈ 470 nm), le vert (≈ 530 nm), le jaune (≈ 580 nm) et l'orange (≈ 600 nm); une lumière **blanche** contient tout le visible, une couleur non spectrale (magenta) résulte d'un mélange.

Définition. L'**indice de réfraction** d'un milieu transparent est $n = c/v$, v étant la vitesse de propagation de la lumière dans ce milieu; comme $v \leq c$, $n \geq 1$. Le milieu est **dispersif** si n dépend de λ_0 : pour les verres usuels n *décroît* quand λ_0 *croît*, donc le violet est plus dévié que le rouge. Ordres de grandeur : $n_{\text{air}} = 1,000\,3 \approx 1,00$; $n_{\text{eau}} = 1,33$; $n_{\text{verre}} \approx 1,5$; $n_{\text{diamant}} = 2,42$.

Définition. Le **modèle de l'optique géométrique** décrit la lumière par des **rayons lumineux**, courbes orientées le long desquelles se propage l'énergie. Dans un milieu homogène ce sont des droites; les rayons sont indépendants et le trajet est **réversible**.

✗ ATTENTION — Les limites du modèle — une capacité exigible

Le modèle suppose que l'on peut isoler un pinceau aussi fin que l'on veut. Or dès que l'ouverture a d'un diaphragme devient comparable à λ_0 , la lumière **diffracte** : le faisceau s'élargit d'un angle $\theta \sim \lambda_0/a$. Le modèle n'est donc valable que si toutes les dimensions du dispositif sont **grandes devant** λ_0 ; il ignore diffraction, interférences et polarisation, et ne dit rien de la *répartition* de l'énergie entre rayon réfléchi et rayon réfracté.

2 RÉFLEXION ET RÉFRACTION : LES LOIS DE SNELL-DESCARTES

Notation. Les angles sont *toujours* mesurés et orientés **par rapport à la normale** au dioptre au point d'incidence. Le **plan d'incidence** contient le rayon incident et la normale.

Théorème — lois de Snell-Descartes. Les rayons réfléchi et réfracté sont dans le plan d'incidence; avec i_1 l'angle d'incidence, r celui de réflexion et i_2 celui de réfraction,

$$r = -i_1 \quad \text{et} \quad n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

Le rayon réfléchi est le symétrique du rayon incident par rapport à la normale; le rayon réfracté se rapproche de la normale si $n_2 > n_1$, s'en écarte si $n_2 < n_1$.

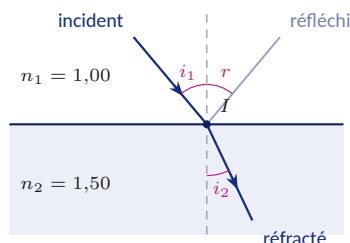


Figure 1 — Réfraction air $\rightarrow$ verre : $i_1 = 40^\circ$ donne $i_2 = 25,4^\circ$.

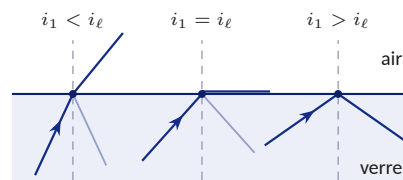


Figure 2 — Réflexion totale au-delà de $i_\ell = 41,8^\circ$ (verre $n_1 = 1,50 \rightarrow$ air $n_2 = 1,00$).

Théorème — réflexion totale. *Démonstration exigible.* Supposons $n_1 > n_2$ (passage du milieu **le plus réfringent vers le moins réfringent**). La loi de la réfraction impose $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 > \sin i_1$: il n'existe de rayon réfracté que si $\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \leq 1$. Il y a donc **réflexion totale** — toute l'énergie repart dans le milieu 1 — dès que

$$i_1 \geq i_\ell \quad \text{avec} \quad \sin i_\ell = \frac{n_2}{n_1}.$$

Si $n_1 < n_2$ il n'y a *jamais* de réflexion totale : i_2 existe toujours et $i_2 \leq \arcsin(n_1/n_2)$. Verre-air : $i_\ell = 41,8^\circ$; eau-air : $i_\ell = 48,8^\circ$.

3 LA FIBRE OPTIQUE À SAUT D'INDICE

Notation. Une fibre à saut d'indice est un cylindre de **cœur** d'indice n_1 entouré d'une **gaine** d'indice $n_2 < n_1$, plongé dans un milieu d'indice n_0 (l'air, $n_0 = 1$). Un rayon entré par la face d'entrée plane sous l'angle θ avec l'axe est **guidé** s'il est en réflexion totale à chaque rencontre avec l'interface cœur-gaine.

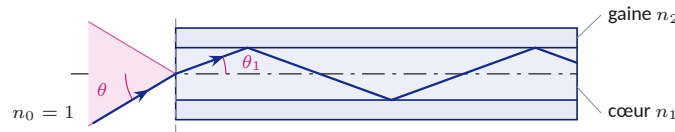


Figure 3 — Cône d'acceptance et rayon guidé (angle volontairement exagéré : $\theta_1 = 20^\circ$ sur la figure, contre $\theta_1 \lesssim 10^\circ$ en pratique).

Théorème — cône d'acceptance. *Démonstration exigible.* Un rayon incident sous l'angle θ se réfracte sur la face d'entrée : $n_0 \sin \theta = n_1 \sin \theta_1$. Il rencontre ensuite l'interface cœur-gaine, parallèle à l'axe, sous l'angle d'incidence $\frac{\pi}{2} - \theta_1$; la réflexion totale exige

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = \cos \theta_1 \geq \frac{n_2}{n_1} \iff \sin^2 \theta_1 \leq 1 - \frac{n_2^2}{n_1^2} \iff n_0 \sin \theta \leq \sqrt{n_1^2 - n_2^2}.$$

Les rayons guidés sont ceux du **cône de demi-angle au sommet** $\theta_{\max}$ tel que $n_0 \sin \theta_{\max} = \text{ON} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$: ON est l'**ouverture numérique** (0,2 à 0,3 pour une fibre usuelle).

Théorème — dispersion intermodale. *Démonstration exigible.* Tous les rayons guidés vont à la même vitesse c/n_1 , mais sur des longueurs différentes : le trajet le plus court est celui du rayon axial, $t_{\min} = n_1 L/c$; le plus long celui du rayon limite, de chemin $L/\cos \theta_{1,\max} = n_1 L/n_2$, d'où

$$t_{\max} = \frac{n_1}{c} \times \frac{n_1 L}{n_2} \implies \Delta\tau = t_{\max} - t_{\min} = \frac{n_1 L}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) = \frac{n_1 (n_1 - n_2) L}{n_2 c}.$$

Une impulsion brève ressort *étalée* de $\Delta\tau$: deux impulsions ne restent distinguables que si elles sont séparées de plus de $\Delta\tau$, d'où un débit maximal de l'ordre de $1/\Delta\tau$. Pour $n_1 = 1,50$ et $n_2 = 1,48$, $\Delta\tau/L \approx 68 \text{ ns} \cdot \text{km}^{-1}$.

4 STIGMATISME, MIROIR PLAN, CONDITIONS DE GAUSS

Définition. Un système est **stigmatique** pour le point objet A s'il existe A' tel que *tout* rayon issu de A émerge en passant par A' : A' est l'**image** de A . Elle est **réelle** si les rayons émergents s'y croisent effectivement (on peut la recueillir sur un écran), **virtuelle** si ce sont leurs *prolongements* qui s'y croisent. Un objet est réel si les rayons incidents en proviennent effectivement, virtuel sinon.

Théorème — miroir plan. Le miroir plan est le seul système **rigoureusement stigmatique** pour tout point : A' est le **symétrique orthogonal** de A par rapport au plan du miroir. Un objet réel donne une image virtuelle et réciproquement ; l'image est de même taille ($\gamma = +1$), non renversée, mais *non superposable* à l'objet. *Idée de la démonstration* : la loi de la réflexion assure que tout rayon issu de A se réfléchit en un rayon dont le prolongement passe par le symétrique de A — propriété de symétrie valable quel que soit l'angle d'incidence, donc sans aucune approximation.

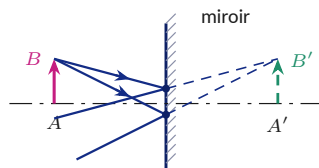


Figure 4 — Miroir plan : A' est le symétrique de A ; l'image est virtuelle.

Remarque — aucun autre système ne l'est. Le dioptré plan ne l'est pas — la profondeur apparente d'un point au fond d'une cuve d'eau *dépend* de l'angle d'observation — ni la lentille. On se contente d'un **stigmatisme approché** : l'image d'un point est une petite tache, et l'on convient qu'il y a image dès qu'elle est *plus petite que le pouvoir de résolution du détecteur* (grain de la rétine $\approx 5 \mu\text{m}$, pixel d'un capteur). C'est donc une propriété du couple {système, détecteur}, non du système seul.

Définition. Un système est utilisé dans les **conditions de l'approximation de Gauss** lorsque les rayons qui le traversent sont **peu inclinés** sur l'axe optique et rencontrent les surfaces **près de l'axe** : ils sont dits **paraxiaux**. En pratique, on diaphragme le faisceau et on limite le champ objet.

Propriété — conséquences. Un système centré utilisé dans les conditions de Gauss est **approximativement stigmatique** (à tout point objet correspond un point image) et **aplanétique** (l'image d'un objet plan perpendiculaire à l'axe est plane et perpendiculaire à l'axe), avec un **grandissement transversal** γ indépendant du point du plan objet — d'où la ressemblance de l'image à l'objet. Les angles étant petits, $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$, linéarisation qui rend les relations de conjugaison homographiques.

❌ PIÈGES — Sur les conditions de Gauss

- Les conditions de Gauss ne sont pas une propriété du système : c'est une *façon de l'utiliser*. Ouvrir le diaphragme les fait sortir (aberrations sphériques), incliner l'objet aussi (coma, astigmatisme).
- Diaphragmer améliore la netteté mais réduit l'éclairement et finit par faire apparaître la diffraction : il existe une ouverture optimale.

5 LENTILLES MINCES DANS LES CONDITIONS DE GAUSS

Définition. Une **lentille mince** est un milieu transparent limité par deux surfaces sphériques (ou une sphère et un plan) d'épaisseur négligeable devant les rayons de courbure. Son **centre optique** O est tel que *tout rayon passant par O n'est pas dévié*; l'axe optique joint les centres des faces, orienté dans le sens de propagation.

Définition. Le **foyer principal image** F' est l'image d'un point objet à l'infini sur l'axe : tout rayon incident parallèle à l'axe émerge par F' . Le **foyer principal objet** F a son image à l'infini sur l'axe : tout rayon incident passant par F émerge parallèle à l'axe. La **distance focale image** est $f' = \overline{OF'}$, avec $\overline{OF} = -f'$; la **vergence** est $V = 1/f'$, en **dioptries** ($\delta = \text{m}^{-1}$). $f' > 0$: lentille **convergente** (bords minces); $f' < 0$: **divergente** (bords épais). Les **foyers secondaires** sont les autres points des plans focaux.

Méthode — les trois rayons. Pour construire l'image B' d'un point B hors de l'axe, on trace deux rayons parmi : celui passant par O (non dévié), celui arrivant parallèle à l'axe (il émerge par F'), celui passant par F (il émerge parallèle à l'axe); A' est alors le pied de la perpendiculaire à l'axe issue de B' (aplanétisme). Pour un *rayon quelconque*, on passe par le **foyer secondaire image** F'_s , intersection du plan focal image avec le rayon parallèle mené par O .

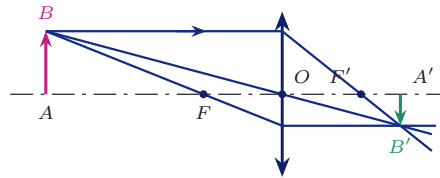


Figure 5 — Convergente, $f' = 2 \text{ cm}$, $\overline{OA} = -6 \text{ cm}$: image réelle renversée, $\overline{OA'} = 3 \text{ cm}$, $\gamma = -0,50$.

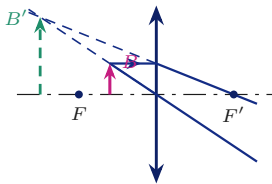


Figure 6 — Objet entre F et O : image virtuelle, droite, agrandie ($\gamma = +2,5$) : la loupe.

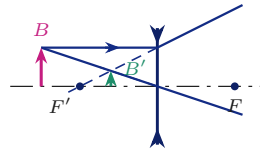


Figure 7 — Divergente : d'un objet réel, l'image est toujours virtuelle, droite, réduite.

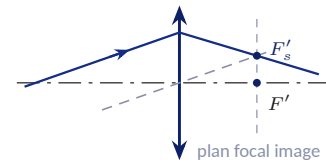


Figure 8 — Rayon quelconque : il émerge par le foyer secondaire image F'_s , obtenu avec le rayon parallèle passant par O .

Théorème — conjugaison et grandissement. Pour une lentille mince de centre O et de distance focale image f' utilisée dans les conditions de Gauss, AB et $A'B'$ étant perpendiculaires à l'axe :

$$\text{Descartes : } \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad \text{Newton : } \overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2 \quad \gamma = \frac{f'}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$$

Toutes les distances sont **algébriques**, mesurées sur l'axe orienté dans le sens de propagation; $\gamma < 0$ signifie image **renversée**. *Idée de la démonstration* : le rayon BO n'étant pas dévié, les triangles ABO et $A'B'O$ sont semblables, d'où $\gamma = \overline{OA'}/\overline{OA}$; le rayon parallèle à l'axe donne, avec les triangles de sommet F' , $\gamma = -\overline{F'A'}/f'$; l'élimination de γ fournit Descartes, et Newton s'en déduit avec $\overline{FA} = \overline{OA} + f'$, $\overline{F'A'} = \overline{OA'} - f'$.

Théorème — formation d'une image réelle — exigible. Une lentille *convergente* ($f' > 0$) donne d'un objet réel une image réelle sur un écran placé à la distance $D = \overline{AA'} > 0$ de l'objet si et seulement si $D \geq 4f'$. *Démonstration* : posons $x = -\overline{OA} > 0$ et $\overline{OA'} = D - x > 0$; la relation de conjugaison s'écrit $\frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$, soit $x^2 - Dx + Df' = 0$, qui admet une racine réelle si et seulement si $\Delta = D(D - 4f') \geq 0$, c'est-à-dire $D \geq 4f'$. Pour $D > 4f'$ il y a **deux positions** de la lentille, $x_{1,2} = \frac{1}{2}(D \mp \sqrt{D^2 - 4Df'})$ (méthode de **Bessel**); pour $D = 4f'$ elles se confondent en $x = 2f'$, avec $\gamma = -1$ (méthode de **Silbermann**).

6 L'ŒIL ET L'APPAREIL PHOTOGRAPHIQUE

Notation. On modélise l'œil par une **lentille mince de vergence variable** (cristallin + cornée) et un **capteur plan fixe** (la rétine), la distance lentille-rétine étant constante ($\approx 17 \text{ mm}$). **Accommoder**, c'est modifier la vergence pour former l'image sur la rétine.

Définition. Le **punctum remotum** (PR) est le point le plus éloigné vu net au repos, le **punctum proximum** (PP) le point le plus proche vu net en accommodation maximale; l'œil emmétrope a son PR à l'infini et son PP à $d_m \approx 25$ cm. La **plage d'accommodation** est l'intervalle de vergence $\Delta V = \frac{1}{d_{PP}} - \frac{1}{d_{PR}} \approx \frac{1}{0,25} - 0 = 4 \delta$. Le **pouvoir de résolution angulaire** de l'œil vaut $\varepsilon \approx 3 \times 10^{-4}$ rad (une minute d'arc), soit deux points séparés de 0,075 mm à 25 cm. Un œil **myope** a son PR à distance finie (il est trop convergent) : on le corrige par une lentille divergente; un œil **hypermétrope** a un PP trop éloigné : lentille convergente. La **presbytie** est la réduction de ΔV avec l'âge.

Notation. **Appareil photographique** : un **objectif** assimilé à une lentille mince convergente de focale f' , diaphragmé au diamètre D_a , et un **capteur plan** à la distance $\overline{OA'}$; le **nombre d'ouverture** est $N = f'/D_a$ (noté f/N). La **mise au point** déplace le capteur pour que l'image du plan visé tombe dessus : $\overline{OA'}$ varie de f' (objet à l'infini) à $2f'$ ($\gamma = -1$). La **profondeur de champ** est l'intervalle des distances objet pour lesquelles la tache image sur le capteur reste de diamètre inférieur au **cercle de confusion** ε , de l'ordre de la taille d'un pixel.

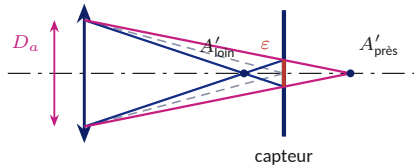


Figure 9 — Profondeur de champ : la tache reste acceptable tant que le point de convergence reste assez près du capteur.

■ FORMULAIRE — Appareil photographique

- Nombre d'ouverture $N = f'/D_a$; l'éclairement du capteur varie comme $1/N^2$.
- **Hyperfocale** $H = \frac{f'^2}{N\varepsilon}$: mise au point à H , tout est net de $H/2$ à l'infini.
- Profondeur de champ (mise au point à d , avec $f' \ll d \ll H$) : $d_{\min} \approx \frac{Hd}{H+d}$ et $d_{\max} \approx \frac{Hd}{H-d}$.
- Fermer le diaphragme ($N \nearrow$) augmente la profondeur de champ mais réduit l'éclairement : il faut allonger la durée d'exposition, au risque du flou de bougé. Allonger la focale réduit la profondeur de champ (en $1/f'^2$) et le champ angulaire.

■ FORMULAIRE — Les relations à connaître par cœur — et les huit démonstrations signalées « exigible »

- $n = c/v$; $\lambda = \lambda_0/n$; ν inchangée.
- $r = -i_1$; $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$; $\sin i_\ell = n_2/n_1$ (si $n_1 > n_2$).
- Miroir plan : A' symétrique de A ; $\gamma = +1$.
- Descartes : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$ et $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$; Newton : $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$ et $\gamma = \frac{f'}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$.
- $V = 1/f'$ en dioptries; lentilles accolées : $V = V_1 + V_2$.
- Image réelle d'un objet réel par une convergente : $D = \overline{AA'} \geq 4f'$.
- Œil : $d_m = 25$ cm, $\Delta V = 4\delta$, $\varepsilon \approx 3 \times 10^{-4}$ rad.
- Fibre : $\text{ON} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$; $\Delta\tau = \frac{n_1(n_1 - n_2)L}{n_2 c}$.
- Valeurs utiles : $\sin 30^\circ = 0,500$; $\sin 45^\circ = 0,707$; $\sin 60^\circ = 0,866$; $c = 3,00 \times 10^8$ m·s⁻¹.

✗ PIÈGES

- Mesurer les angles depuis la *surface* et non depuis la *normale*; chercher une réflexion totale dans le sens $n_1 < n_2$, alors qu'elle exige un passage du milieu le plus réfringent vers le moins réfringent.
- Oublier le caractère **algébrique** des distances ($\overline{OA} < 0$ pour un objet réel, $f' < 0$ pour une divergente), ou écrire $\frac{1}{\overline{OA'}} + \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$: c'est une *différence*.
- Croire qu'une divergente ne donne jamais d'image réelle (d'un objet *virtuel* entre O et F , si), ou confondre « image virtuelle » et « image qui n'existe pas » : une image virtuelle est parfaitement observable à l'œil (loupe, miroir).
- Oublier que $\gamma < 0$ signifie renversée, et confondre **grandissement** (rapport de tailles, objet et image à distance finie) et **grossissement** (rapport d'angles apparents, instrument d'observation).
- Appliquer les relations de conjugaison hors des conditions de Gauss ou à un dioptré plan sous grande incidence; tracer l'émergent d'un rayon quelconque sans construire le foyer secondaire.