

Fiche de cours Mesures et incertitudes

Incertitude-type, types A et B, composition, écart normalisé, régression linéaire, prévention du risque

définitions · méthodes · capacités numériques · pièges

1 MESURER : VOCABULAIRE ET SOURCES DE VARIABILITÉ

Définition. **Mesurer** une grandeur physique, c'est lui attribuer une valeur numérique assortie d'une unité, au terme d'un **processus de mesure** (instrument, protocole, opérateur, environnement). La **valeur vraie** est inconnue par principe : toute mesure en donne une estimation. L'**erreur de mesure** est la différence, inconnue, entre la valeur mesurée et la valeur vraie.

Propriété — deux types d'erreurs. Les **erreurs aléatoires** changent de valeur et de signe d'une mesure à l'autre : elles se manifestent par la **dispersion** des résultats et se réduisent en répétant les mesures. Les **erreurs systématiques** sont identiques à chaque mesure : elles **décalent** tous les résultats sans modifier la dispersion. Répéter la mesure ne les élimine pas ; seuls un changement de méthode, un étalonnage ou une correction les suppriment.

Méthode — recenser les sources d'incertitude. Quatre familles : l'**opérateur** (temps de réaction, lecture d'une graduation, paralaxe, virage coloré) ; l'**environnement** (température, pression, vibrations) ; les **instruments** (résolution, calibre, classe, étalonnage, perturbation du circuit mesuré) ; la **méthode** (modèle simplificateur : frottements négligés, lentille supposée mince, réaction supposée totale).

2 INCERTITUDE-TYPE ET INCERTITUDE ÉLARGIE

Définition. L'**incertitude-type** $u(x)$ associée au résultat x d'une mesure estime l'écart-type de la distribution des valeurs qu'on obtiendrait en répétant le processus de mesure. Elle est toujours positive et a la **même unité** que x ; l'**incertitude relative** $u(x)/x$ est sans dimension. L'**incertitude élargie** est $U(x) = k u(x)$; on écrit alors $x = x_{\text{mes}} \pm U(x)$ en précisant k . Sauf mention contraire, une incertitude annoncée est une incertitude-type ($k = 1$).

Propriété — loi normale. Si les valeurs mesurées se répartissent selon une **loi normale** d'écart-type σ autour de la valeur vraie, une mesure tombe dans l'intervalle centré de demi-largeur σ avec la probabilité 68 %, 2σ avec 95 %, 3σ avec 99,7 %. D'où l'usage : $k = 2$ fournit un **intervalle de confiance à 95 %**.

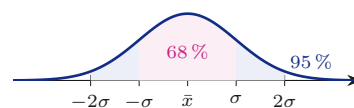


Figure 1 — Loi normale.

3 ÉVALUATION DE TYPE A : L'APPROCHE STATISTIQUE

Définition. Une évaluation est de **type A** lorsqu'elle repose sur l'*analyse statistique d'une série de mesures répétées* dans les mêmes conditions.

Théorème — incertitude-type de type A. Soit $x_1, \dots, x_n$ les résultats de n mesures indépendantes ($n \geq 5$ en pratique). On calcule la **moyenne** $\bar{x}$ et l'**écart-type expérimental** s ; le résultat retenu est $\bar{x}$, et l'incertitude-type associée est l'**écart-type expérimental de la moyenne** :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \boxed{u(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Remarque. *Trois confusions à éviter.* s mesure la dispersion des mesures : elle ne diminue pas quand n augmente, elle se stabilise ; $u(\bar{x}) = s/\sqrt{n}$ mesure l'incertitude sur la *moyenne* et décroît en $1/\sqrt{n}$ — quadrupler le nombre de mesures ne divise l'incertitude que par 2. Enfin une évaluation de type A ne capte que les *erreurs aléatoires* : une règle dilatée, un zéro décalé, un titrage lu après l'équivalence donnent des mesures très reproductibles et pourtant fausses.

4 ÉVALUATION DE TYPE B : TOUT LE RESTE

Définition. Une évaluation est de **type B** lorsqu'elle repose non sur une série de mesures, mais sur une information extérieure : notice du constructeur, classe de l'instrument, résolution de l'affichage, tolérance d'une verrerie, expérience de l'opérateur.

Théorème — loi uniforme. Si la seule information disponible est que la valeur se trouve dans un intervalle de *demi-largeur* Δ autour de la valeur affichée, sans qu'aucune valeur n'y soit plus probable qu'une autre (**loi uniforme**), alors

$$\boxed{u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}} \quad \text{soit} \quad u(x) = \frac{\text{largeur totale}}{\sqrt{12}}.$$

★ EXEMPLE — les quatre cas à connaître

- **Résolution d'un affichage numérique** : dernier digit δ , la valeur est connue à $\pm\delta/2$, donc $u = \delta/(2\sqrt{3}) = \delta/\sqrt{12}$. Affichage 4,832 V : $\delta = 1$ mV, $u = 0,29$ mV.
- **Notice d'un multimètre** : précision $\pm(a\%$ de la lecture $+ n$ digits); on calcule Δ puis $u = \Delta/\sqrt{3}$. Pour 4,832 V et $\pm(0,5\% + 2$ digits) : $\Delta = 0,005 \times 4,832 + 2 \times 0,001 = 26,2$ mV, $u = 15$ mV.
- **Verrerie jaugée** : tolérance gravée sur le verre. Fiole de 100 mL classe A, $\pm 0,10$ mL : $u = 0,058$ mL; burette, $\pm 0,05$ mL par lecture : $u = 0,029$ mL. **Règle graduée** au millimètre : $u = 1/(2\sqrt{3}) = 0,29$ mm par pointé.

Résolution, calibre et nombre de points : un multimètre 4000 points affiche au plus 3999 unités du dernier digit; la résolution vaut 1 mV sur le calibre 4 V et 10 mV sur le calibre 40 V. Choisir le plus petit calibre contenant la valeur fait gagner un facteur 10.

5 COMPOSITION DES INCERTITUDES

Théorème — formule de composition — admise. Soit $y = f(x_1, \dots, x_p)$, les x_i étant mesurés indépendamment avec les incertitudes-types $u(x_i)$. Alors $u(y)^2 = \sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u(x_i)^2$. Deux cas particuliers suffisent en pratique :

- **somme et différence**, $y = \alpha x_1 + \beta x_2$:
$$u(y)^2 = \alpha^2 u(x_1)^2 + \beta^2 u(x_2)^2$$
- **produit, quotient, puissance**, $y = k x_1^\alpha x_2^\beta$ (k constante exacte) : ce sont les incertitudes relatives qui se composent,

$$\left(\frac{u(y)}{y} \right)^2 = \alpha^2 \left(\frac{u(x_1)}{x_1} \right)^2 + \beta^2 \left(\frac{u(x_2)}{x_2} \right)^2$$

✗ ATTENTION — Les trois fautes classiques

On n'additionne jamais les incertitudes : on additionne leurs carrés. Pour une différence $y = x_1 - x_2$ le signe $-$ disparaît, $u(y)^2 = u(x_1)^2 + u(x_2)^2$: l'incertitude augmente. Enfin une incertitude relative ne se compose que dans un produit ou un quotient, jamais dans une somme.

★ EXEMPLE — comparer les contributions, et n'améliorer que la plus grande

$R = U/I$ avec $U = 4,832$ V, $u(U) = 15$ mV et $I = 2,45$ mA, $u(I) = 0,02$ mA : $\frac{u(U)}{U} = 3,1 \times 10^{-3}$, $\frac{u(I)}{I} = 8,2 \times 10^{-3}$, donc $\frac{u(R)}{R} = \sqrt{3,1^2 + 8,2^2} \times 10^{-3} = 8,7 \times 10^{-3}$, d'où $R = 1\,972 \Omega$ et $u(R) = 17 \Omega$. L'intensité apporte 87 % de la variance : améliorer le voltmètre ne servirait à rien. Plus généralement, **une contribution dix fois plus petite qu'une autre n'augmente le résultat que de 0,5 %** : elle est négligeable ; une contribution trois fois plus petite l'augmente encore de 5 %.

6 ÉCRITURE D'UN RÉSULTAT ET CHIFFRES SIGNIFICATIFS

Méthode — règle d'écriture. (i) arrondir l'incertitude à **un chiffre significatif** — ou à deux si le premier est un 1, et par excès en cas d'hésitation ; (ii) arrondir la valeur mesurée au même rang décimal ; (iii) écrire les deux avec la même puissance de dix et une seule unité : $x = (x_{\text{mes}} \pm u(x))$ unité.

Remarque. Trois écritures à savoir produire. $\ell = 12,3456$ m, $u = 0,0271$ m $\rightarrow \ell = (12,35 \pm 0,03)$ m ; $U = 4,8321$ V, $u = 0,0151$ V $\rightarrow U = (4,832 \pm 0,015)$ V (deux chiffres, l'incertitude commence par 1) ; $c = 5,312 \times 10^{-3}$ mol·L⁻¹, $u = 2,18 \times 10^{-4}$ $\rightarrow c = (5,3 \pm 0,2) \times 10^{-3}$ mol·L⁻¹. Le nombre de chiffres significatifs est imposé par l'incertitude, jamais par l'affichage de la calculatrice : un résultat sans unité, ou avec huit décimales, est faux.

7 COMPARER DEUX VALEURS : L'ÉCART NORMALISÉ

Définition. L'écart normalisé entre deux valeurs x_1 et x_2 d'incertitudes-types $u(x_1)$ et $u(x_2)$ est le nombre sans dimension

$$E_N = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

Les deux résultats sont **compatibles** si $E_N \leq 2$, **incompatibles** sinon ; le seuil 2 correspond au niveau de confiance de 95 % de la loi normale. Si la valeur de référence est tabulée avec une incertitude négligeable, $E_N = |x_{\text{mes}} - x_{\text{réf}}| / u(x_{\text{mes}})$.

Méthode — que faire d'un $E_N > 2$? Ne jamais conclure « la mesure est ratée ». Chercher, dans l'ordre : une **erreur systématique** non corrigée (zéro décalé, résistance des fils, amplitude trop grande d'un pendule, réactif non titré) ; une **incertitude sous-estimée** (contribution oubliée) ; une **hypothèse de modèle fautive** (frottements, lentille épaisse, réaction non totale). Un écart normalisé trop grand est une information, pas un échec.

8 RÉGRESSION LINÉAIRE ET VALIDATION D'UN MODÈLE

Méthode — modéliser. Lorsque la théorie prévoit une relation affine $y = ax + b$, on porte les points avec leurs barres d'incertitude et l'on détermine a et b par la **méthode des moindres carrés** : ce sont les valeurs qui minimisent $\sum_i (y_i - ax_i - b)^2$. Un logiciel fournit a , b et leurs incertitudes-types $u(a)$, $u(b)$; les formules sont $a = \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \sum_i (x_i - \bar{x})^2$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

Théorème — les deux procédures de validation. Une régression ne valide rien par elle-même : un logiciel ajuste une droite sur n'importe quel nuage. On valide par l'**analyse graphique** — la droite doit traverser toutes les barres d'incertitude — ou par l'**analyse des écarts normalisés** : pour chaque point, $E_{N,i} = |y_i - (ax_i + b)| / u(y_i)$ doit rester ≤ 2 . On vérifie de plus que les résidus $y_i - (ax_i + b)$ sont **répartis au hasard** de part et d'autre de zéro : une structure en arche signale un modèle inadapté.

Remarque. Le coefficient de corrélation ne valide pas un modèle : $r = 0,999$ s'obtient avec des données franchement courbes. Ne jamais conclure sur r seul, et ne jamais forcer une régression par l'origine sans avoir vérifié que l'ordonnée à l'origine est compatible avec 0, c'est-à-dire $|b| / u(b) \leq 2$.

9 ANALYSE DIMENSIONNELLE

Méthode — contrôler une formule. Toute grandeur a une **dimension**, produit de puissances des dimensions de base L, M, T, I, Θ , N ; on note $[X]$ la dimension de X . On n'ajoute que des grandeurs de même dimension — une égalité est **homogène** ou fautive ; $[XY] = [X][Y]$, dX a la dimension de X , $[dX/dt] = [X] T^{-1}$; les arguments de $\exp$, $\ln$, $\cos$, $\sin$ et les exposants sont **sans dimension** ; un coefficient numérique est sans dimension, donc l'**analyse dimensionnelle ne le donne jamais**.

Remarque. Période d'un pendule. Cherchons $T = k m^\alpha \ell^\beta g^\gamma$. En dimensions, $T = M^\alpha L^\beta (LT^{-2})^\gamma$, d'où $\alpha = 0$, $\beta + \gamma = 0$ et $-2\gamma = 1$: $\gamma = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ et $T = k\sqrt{\ell/g}$. La masse n'intervient pas — prédiction forte ; en revanche $k = 2\pi$ ne s'obtient que par la résolution complète.

10 CAPACITÉS NUMÉRIQUES : LA SIMULATION DE MONTE-CARLO

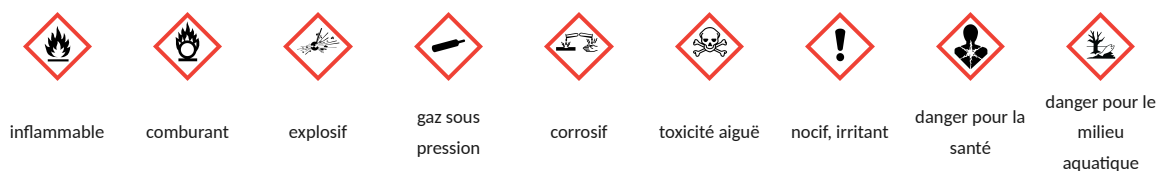
Méthode — principe. Pour caractériser la variabilité d'une grandeur composée $y = f(x_1, \dots, x_p)$, on **tire au hasard** N jeux de valeurs selon les distributions associées aux incertitudes (loi normale d'écart-type $u(x_i)$, loi uniforme de demi-largeur Δ), on calcule y pour chacun et l'on prend pour $u(y)$ l'**écart-type de l'échantillon obtenu** : la méthode ne suppose ni linéarité, ni petites incertitudes. Le même principe teste la **robustesse d'une régression** : on perturbe chaque y_i par un tirage normal d'écart-type $u(y_i)$, on refait la régression, et l'écart-type des pentes donne $u(a)$.

```
1 import numpy as np
2 N = 100000                                # nombre de tirages
3 U = np.random.normal(4.832, 0.0151, N)    # V : loi normale d'ecart-type u(U)
4 I = np.random.normal(2.45e-3, 0.02e-3, N)  # A
5 R = U / I                                  # la grandeur composee
6 print(R.mean(), R.std(ddof=1))             # -> 1972 ohm et u(R) = 17 ohm
7
8 pentes = np.zeros(1000)                   # robustesse d'une regression
9 for k in range(1000):
10     ysim = y + np.random.normal(0.0, uy, len(y))
11     pentes[k], ordonnee = np.polyfit(x, ysim, 1)
12 print(pentes.mean(), pentes.std(ddof=1))  # pente moyenne et son incertitude
```

Remarque. Si les incertitudes relatives sont faibles (quelques pour cent), la simulation redonne la formule de composition. Elle s'en écarte lorsqu'une incertitude relative devient grande ou que la fonction est fortement non linéaire : c'est alors la simulation qui a raison.

11 PRÉVENTION DU RISQUE AU LABORATOIRE

Définition. Le **système général harmonisé** (SGH) classe les dangers et les signale par neuf **pictogrammes**, losanges rouges sur fond blanc. Toute étiquette porte en outre des **mentions de danger** (phrases H) et des **conseils de prudence** (phrases P) ; la **fiche de données de sécurité** (FDS), en seize rubriques, détaille manipulation, stockage, incompatibilités et élimination.



Propriété — phrases usuelles. Le premier chiffre d'une phrase H indique la famille : **H2xx** dangers physiques, **H3xx** dangers pour la santé, **H4xx** dangers pour l'environnement. À reconnaître : **H225** liquide et vapeurs très inflammables ; **H302** nocif en cas d'ingestion ; **H314** graves brûlures de la peau et lésions oculaires ; **H319** sévère irritation des yeux ; **H400** très toxique pour les organismes aquatiques. Prudence : **P210** tenir à l'écart de la chaleur ; **P280** porter gants, lunettes et blouse ; **P305+P351+P338** contact oculaire : rincer 15 minutes, retirer les lentilles ; **P501** éliminer dans un bidon de récupération adapté.

Méthode — attitude au laboratoire. Blouse fermée, lunettes, cheveux attachés ; verser *l'acide dans l'eau* et jamais l'inverse ; hotte pour tout produit volatil ; jamais de pipetage à la bouche ; repérer douche de sécurité et rince-œil *avant* de commencer ; trier les déchets (bidons aqueux, organiques, halogénés) au lieu de les rejeter à l'évier et, à résultat égal, choisir le protocole qui consomme le moins de réactif dangereux. **Optique** : jamais l'œil dans l'axe d'un faisceau laser, même de classe 2. **Pression et température** : pince pour la verrerie chaude, écran devant une enceinte sous vide, verrerie ébréchée écartée.

Propriété — risque électrique. La grandeur dangereuse est l'**intensité** traversant le corps : perception vers 1 mA, téτανisation vers 10 mA, fibrillation vers 50 mA ; la résistance du corps allant de 1 kΩ à 100 kΩ selon l'humidité, les tensions limites de sécurité valent 50 V en alternatif et 120 V en continu. En TP : câbler *hors tension*, ne jamais toucher une borne sous tension, se rappeler que les masses du GBF et de l'oscilloscope sont reliées à la terre, ne pas ouvrir brutalement un circuit inductif ni court-circuiter un condensateur chargé.

12 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Identifier et classer les sources d'incertitude d'un protocole ; mener une évaluation de type A ($\bar{x}$, s , $u(\bar{x}) = s/\sqrt{n}$) et une évaluation de type B (résolution, calibre, notice, tolérance).
- Composer les incertitudes d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance ; désigner la contribution à améliorer en priorité ; écrire le résultat avec un nombre adapté de chiffres significatifs et son unité.
- Calculer un écart normalisé, conclure à la compatibilité, analyser une incompatibilité.
- Exploiter une régression linéaire : extraire une grandeur physique de la pente, valider par les barres d'incertitude ou les écarts normalisés.
- Conduire une analyse dimensionnelle ; écrire et interpréter une simulation de Monte-Carlo.
- Lire une étiquette SGH, exploiter les phrases H et P, adopter une attitude responsable et éliminer proprement.

■ FORMULAIRE — Les relations à connaître par cœur

- Type A : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$; $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2}$; $u(\bar{x}) = s/\sqrt{n}$. Type B : $u = \Delta/\sqrt{3}$ (demi-largeur Δ), $u = \delta/(2\sqrt{3})$ (résolution δ).
- $y = \alpha x_1 + \beta x_2$: $u(y)^2 = \alpha^2 u(x_1)^2 + \beta^2 u(x_2)^2$. $y = k x_1^\alpha x_2^\beta$: $\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 = \alpha^2 \left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2$.
- $E_N = |x_1 - x_2| / \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}$; compatibilité si $E_N \leq 2$. $U = k u$; $k = 2$ pour 95 %.
- $\sqrt{3} = 1,732$; $1/\sqrt{3} = 0,577$; $1/(2\sqrt{3}) = 1/\sqrt{12} = 0,289$; $\sqrt{2} = 1,414$.

✗ PIÈGES

- Recopier les huit chiffres de la calculatrice, donner une incertitude à trois chiffres significatifs, ou écrire valeur et incertitude à des rangs décimaux différents : $\ell = (12,345 \pm 0,03)$ m n'a pas de sens.
- Additionner les incertitudes au lieu de composer leurs carrés ; composer des incertitudes *relatives* dans une somme ou une différence.
- Confondre l'écart-type s d'une série et l'incertitude $u(\bar{x}) = s/\sqrt{n}$; croire qu'augmenter n réduit l'incertitude totale (seule la part de type A décroît), ou qu'une série reproductible est une série juste.
- Conclure « ça ne marche pas » sans calculer l'écart normalisé, ou « ça marche » sur la seule valeur de r ; forcer une régression par l'origine sans vérifier $|b|/u(b) \leq 2$.
- Mélanger deux unités dans un même calcul ; verser l'eau dans l'acide ; jeter un déchet organique à l'évier.