

Fiche de cours

Circuits du premier ordre

Régime libre, réponse à un échelon, temps caractéristique, bilan énergétique

définitions · méthodes · démonstrations exigibles · pièges

1 RÉGIME TRANSITOIRE ET RÉGIME PERMANENT

Définition. On appelle **régime permanent** (ou régime établi) le régime vers lequel tend un circuit lorsque les sources sont maintenues constantes depuis « suffisamment longtemps ». Le **régime transitoire** est la phase d'évolution qui le précède, consécutive à une modification brutale du circuit (fermeture ou ouverture d'un interrupteur, échelon de tension).

Définition. Un **échelon de tension** d'amplitude E est la fonction $e(t) = 0$ pour $t < 0$ et $e(t) = E$ pour $t > 0$. Un circuit est en **régime libre** lorsque toutes les sources sont éteintes : il évolue alors à partir de la seule énergie initialement stockée dans C ou L .

Notation. Les valeurs juste avant et juste après la commutation sont notées $x(0^-)$ et $x(0^+)$. Sauf indication contraire, la commutation a lieu à $t = 0$ et l'on étudie le circuit pour $t > 0$.

2 CONTINUITÉS ET COMPORTEMENTS LIMITES

Théorème — continuité. L'énergie stockée dans un condensateur, $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u_C^2$, et dans une bobine, $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i_L^2$, ne peut pas varier de façon discontinue (il faudrait une puissance infinie). Donc, tant que C et L sont non nuls et que les courants et tensions restent bornés :

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) \quad \text{et} \quad i_L(0^+) = i_L(0^-).$$

Idée de la démonstration : $i_C = C \, du_C / dt$; si u_C sautait, du_C / dt serait une distribution non bornée, donc i_C aussi. Même raisonnement pour $u_L = L \, di_L / dt$.

✗ ATTENTION — Ce qui n'est pas continu

Rien n'impose la continuité de i dans une branche capacitive ni de u aux bornes d'une bobine : ces deux grandeurs *sautent* en général à $t = 0$. Dans le circuit RC série soumis à un échelon, i passe brutalement de 0 à E/R .

Propriété — régime permanent continu. Lorsque toutes les grandeurs sont constantes, $du_C / dt = 0$ donc $i_C = 0$: le **condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert**. De même $di_L / dt = 0$ donc $u_L = 0$: la **bobine idéale se comporte comme un fil**.

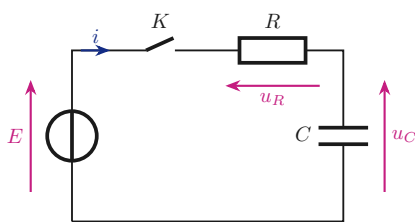


Figure 1 — Circuit RC série

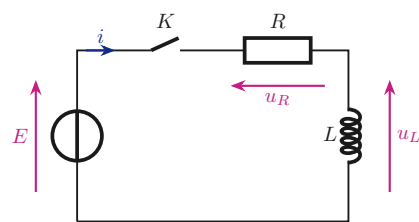


Figure 2 — Circuit RL série

3 MISE EN ÉQUATION : LA MÉTHODE

Méthode — circuit à une maille. (i) orienter le courant et flécher les tensions en convention récepteur pour R, C, L ; (ii) écrire la loi des mailles; (iii) exprimer toutes les tensions en fonction d'une seule inconnue et de sa dérivée, à l'aide de $u_R = R i$, $i = C \, du_C / dt$, $u_L = L \, di / dt$; (iv) ordonner sous forme canonique.

Théorème — forme canonique. Toute grandeur électrique y d'un circuit linéaire du premier ordre vérifie

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = f(t), \quad \tau > 0,$$

où τ est le **temps caractéristique** (ou constante de temps) du circuit et f un second membre imposé par les sources. Le temps caractéristique ne dépend que du circuit passif, jamais des sources ni des conditions initiales.

Méthode — circuit à deux mailles. Débrancher le condensateur (ou la bobine) : le reste du circuit est un dipôle linéaire actif, que l'on remplace par son **modèle de Thévenin** (E_{th} , R_{th}). On est ramené à un circuit à une maille, et

$$\tau = R_{th} C \quad \text{ou} \quad \tau = \frac{L}{R_{th}}.$$

R_{th} est la résistance vue entre les deux bornes libres, *sources éteintes* (source de tension idéale remplacée par un fil, source de courant idéale par un circuit ouvert).

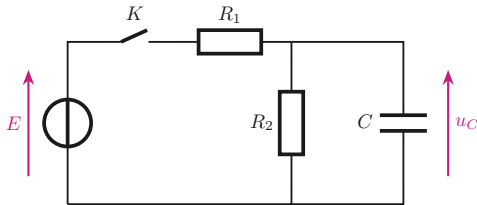


Figure 3 — Circuit à deux mailles

★ **EXEMPLE — deux mailles, figure 3**

Le dipôle vu par C est $\{E, R_1, R_2\}$: à vide $E_{th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$ (pont diviseur, licite car aucun courant n'est dérivé lorsque C est débranché), et sources éteintes $R_{th} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.
Donc

$$\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C, \quad u_{C\infty} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E,$$

et $u_C(t) = u_{C\infty}(1 - e^{-t/\tau})$ si $u_C(0^-) = 0$.

4 RÉSOLUTION

Théorème — régime libre. L'équation $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = 0$ a pour solutions $y(t) = A e^{-t/\tau}$, $A \in \mathbb{R}$. La condition initiale donne $A = y(0^+)$, d'où

$$y(t) = y(0^+) e^{-t/\tau}.$$

Théorème — réponse à un échelon. Si f est constante pour $t > 0$, la solution particulière constante est $y_\infty = \tau f$: c'est la valeur en régime permanent. La solution complète est

$$y(t) = y_\infty + (y(0^+) - y_\infty) e^{-t/\tau}.$$

Cette formule dispense de tout calcul de constante : il suffit de connaître $y(0^+)$ (par continuité), y_∞ (par l'étude du régime permanent) et τ .

★ **EXEMPLE — RC série, condensateur initialement déchargé**

Loi des mailles : $E = u_R + u_C = Ri + u_C$ avec $i = C \, du_C / dt$, d'où $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$, soit $\tau = RC$. Ici $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ et $u_{C\infty} = E$:

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}), \quad i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}, \quad u_R(t) = E e^{-t/\tau}.$$

★ **EXEMPLE — RL série, bobine initialement non parcourue**

Loi des mailles : $E = Ri + L \frac{di}{dt}$, soit $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$ et $\tau = L/R$. Avec $i(0^+) = 0$ et $i_\infty = E/R$:

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau}), \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt} = E e^{-t/\tau}.$$

Remarque. Si f n'est pas constante (rampe, sinusoïde, créneau), on cherche une solution particulière de la forme du second membre : affine pour une rampe, sinusoïdale de même pulsation pour une excitation sinusoïdale.

5 LE TEMPS CARACTÉRISTIQUE

Propriété — lectures. Pour une évolution $y(t) = y_\infty + (y(0^+) - y_\infty) e^{-t/\tau}$, l'écart à la valeur finale est divisé par $e \approx 2,72$ à chaque durée τ :

- $t = \tau$: 63 % de l'écart total est parcouru ($1 - e^{-1} = 0,632$) ; il en reste 37 % ;
- $t = 3\tau$: 95 % ; $t = 5\tau$: 99,3 % — on considère le **régime permanent atteint au bout de 5τ** ;

- la **tangente à l'origine** coupe l'asymptote $y = y_\infty$ à la date $t = \tau$;
- $t_{1/2} = \tau \ln 2 \approx 0,69 \tau$ est la durée au bout de laquelle l'écart est divisé par deux.

Méthode — homogénéité. $[RC] = \frac{[u]}{[i]} \times \frac{[q]}{[u]} = \frac{[q]}{[i]} = s$; $\left[\frac{L}{R}\right] = \frac{[u][t]}{[i]} \times \frac{[i]}{[u]} = s$. Toujours vérifier : une constante de temps s'écrit RC , jamais R/C ni L/R .

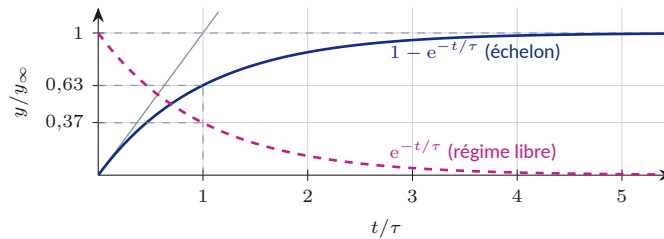


Figure 4 — Réponses normalisées : la tangente à l'origine coupe l'asymptote à $t = \tau$.

Méthode — mesurer τ sur un enregistrement. La lecture à 63 % est peu précise. On préfère *linéariser* : en régime libre, $\ln(u_C(t)/U_0) = -t/\tau$. Le tracé de $\ln u_C$ en fonction de t doit être une droite de pente $-1/\tau$; une régression linéaire fournit τ et l'alignement des points valide le modèle exponentiel.

Propriété — ordres de grandeur. $1 \text{ k}\Omega$ et $1 \mu\text{F}$ donnent $\tau = 1 \text{ ms}$: en travaux pratiques on visualise donc le transitoire en alimentant le circuit par un GBF en créneaux de période $T \gg 5\tau$, soit quelques dizaines de hertz. Un flash photographique ($150 \mu\text{F}$, 2Ω) a $\tau \approx 0,3 \text{ ms}$; une temporisation ($1 \text{ M}\Omega$, $10 \mu\text{F}$) a $\tau = 10 \text{ s}$.

6 BILANS ÉNERGÉTIQUES

Propriété — puissances. En convention récepteur, $\mathcal{P} = u i$. Pour une résistance, $\mathcal{P}_R = R i^2 \geq 0$: l'énergie est *dissipée* (effet Joule), jamais restituée. Pour C et L , $\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$ avec $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u_C^2$ et $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i^2$: l'énergie est *stockée* puis restituée.

Théorème — rendement de la charge d'un condensateur. Lors de la charge complète d'un condensateur initialement déchargé sous un échelon E à travers R :

$$W_{\text{gén}} = \int_0^{+\infty} E i \, dt = C E^2, \quad \mathcal{E}_C(\infty) = \frac{1}{2} C E^2, \quad W_J = \int_0^{+\infty} R i^2 \, dt = \frac{1}{2} C E^2.$$

La moitié exactement de l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet Joule, quelle que soit la valeur de R . Diminuer R accélère la charge mais ne change pas ce rendement de 50 %.

Méthode — vérifier un bilan. Écrire la loi des mailles, la multiplier par i : chaque terme devient une puissance. Intégrer ensuite entre deux dates. Le bilan doit se refermer : $W_{\text{gén}} = \Delta \mathcal{E}_{\text{stockée}} + W_J$.

7 CAPACITÉ NUMÉRIQUE : LA MÉTHODE D'EULER

Méthode — schéma d'Euler explicite. Pour $\frac{dy}{dt} = g(t, y)$ avec $y(t_0) = y_0$, on discrétise le temps avec un pas h et l'on approche la dérivée par $\frac{y_{k+1} - y_k}{h}$, d'où

$$t_{k+1} = t_k + h, \quad y_{k+1} = y_k + h g(t_k, y_k).$$

Appliqué à $\frac{du_C}{dt} = \frac{e(t) - u_C}{\tau}$, ce schéma permet de simuler la réponse à une excitation $e(t)$ de forme quelconque (créneau, rampe, signal enregistré).

```
1 import numpy as np
2 tau = 1.0e3 * 1.0e-6          # tau = R*C = 1 ms
3 h = tau / 100                 # pas : petit devant tau
4 t = np.arange(0.0, 8 * tau, h)
5 u = np.zeros(len(t))          # u[0] = 0 : condensateur decharge
6
7 def e(x):                      # creneau 0 / 5 V de periode 4 tau
8     return 5.0 * (x % (4 * tau) < 2 * tau)
9
10 for k in range(len(t) - 1):
11     u[k + 1] = u[k] + h * (e(t[k]) - u[k]) / tau
```

Remarque. Le pas doit rester *petit* devant τ : pour $h > 2\tau$ le schéma explicite diverge, pour $h \sim \tau$ il reste stable mais très imprécis. En pratique $h \leq \tau/20$.

8 DÉMONSTRATIONS À SAVOIR REFAIRE

- **Continuité de u_C et de i_L** : l'énergie stockée ne peut pas sauter, faute de quoi la puissance serait infinie ; en pratique on invoque le caractère borné de $i_C = C \, du_C/dt$ et de $u_L = L \, di_L/dt$.
- **Équation différentielle du RC et du RL série** : loi des mailles, puis élimination de toutes les inconnues sauf une, à l'aide des relations constitutives.
- **Résolution de $dy/dt + y/\tau = f$ avec f constant** : solution homogène $Ae^{-t/\tau}$ + solution particulière constante τf , puis A par la condition initiale.
- **Temps caractéristique par Thévenin** : débrancher C (ou L), calculer R_{th} sources éteintes.
- **Rendement de 50 % de la charge d'un condensateur** : intégrer Ei et Ri^2 sur $[0; +\infty[$, avec $\int_0^{+\infty} e^{-2t/\tau} dt = \tau/2$.
- **Homogénéité de RC et de L/R** : analyse dimensionnelle à partir de $q = Cu$, $u = Ri$ et $u = L \, di/dt$.

★ EXEMPLE — bilan énergétique de l'établissement du courant dans une bobine

Circuit RL de la figure 2 : la loi des mailles $E = Ri + L \, di/dt$ multipliée par i donne $Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2)$. La puissance fournie se répartit entre dissipation Joule et stockage magnétique ; en régime permanent, $i = E/R$ est constante, toute la puissance E^2/R est dissipée et l'énergie stockée vaut $\frac{1}{2}L(E/R)^2$.

9 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Distinguer régime transitoire et régime permanent sur un relevé ; repérer la date de commutation.
- Déterminer $y(0^+)$ par continuité de u_C ou de i_L , et y_∞ par l'étude du régime permanent (C ouvert, L fil).
- Établir l'équation différentielle d'un circuit à une ou deux mailles ; passer par le modèle de Thévenin pour les deux mailles.
- Résoudre : régime libre, échelon, et reconnaître τ sur la forme canonique.
- Déterminer τ graphiquement (tangente à l'origine, 63 %, 37 %) ou par régression linéaire sur $\ln$.
- Estimer la durée du régime transitoire ($\approx 5\tau$) et la comparer à une durée imposée.
- Réaliser un bilan énergétique complet et commenter le rendement.
- Écrire une boucle d'Euler explicite pour une excitation quelconque et discuter le choix du pas.

■ FORMULAIRE — Les relations à connaître par cœur

- Dipôles : $i_C = C \frac{du_C}{dt}$; $u_L = L \frac{di_L}{dt}$; $u_R = Ri$ (convention récepteur).
- Énergies : $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u_C^2$; $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i_L^2$; $\mathcal{P}_J = Ri^2$.
- Temps caractéristiques : $\tau_{RC} = RC$; $\tau_{RL} = L/R$; deux mailles : remplacer R par R_{th} .
- Solution universelle : $y(t) = y_\infty + (y(0^+) - y_\infty) e^{-t/\tau}$ pour un second membre constant.
- Valeurs numériques : $e^{-1} = 0,368$; $1 - e^{-1} = 0,632$; $e^{-3} = 0,050$; $e^{-5} = 6,7 \times 10^{-3}$; $\ln 2 = 0,693$; $\ln 10 = 2,30$.
- Repères : $1 \, \text{k}\Omega \times 1 \, \mu\text{F} = 1 \, \text{ms}$; $1 \, \text{H}/1 \, \text{k}\Omega = 1 \, \text{ms}$.

✗ PIÈGES

- Imposer la continuité de i dans une branche capacitive, ou de u aux bornes d'une bobine : ce sont u_C et i_L qui sont continues, et elles seules.
- Écrire $\tau = R/C$ ou $\tau = RL$: toujours contrôler l'homogénéité.
- Oublier d'utiliser la condition initiale, ou l'écrire à $t = 0^-$ pour une grandeur discontinue.
- Traiter un second membre non constant (rampe, créneau) comme s'il était constant.
- Confondre la solution du régime libre (homogène) et la solution particulière.
- Lire τ à 50 % de l'écart : c'est 63 % en charge, 37 % en décharge ; 50 % correspond à $\tau \ln 2$.
- Appliquer un pont diviseur de tension à une branche traversée par un courant dérivé.
- Croire que diminuer R améliore le rendement énergétique de la charge d'un condensateur : il vaut 50 % quoi qu'il arrive.
- En simulation, prendre un pas h comparable à τ : le résultat est faux, voire divergent.