

Fiche de cours

Séries et familles sommables

Convergence, séries à termes positifs, convergence absolue, séries alternées, familles sommables

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

1 SÉRIES NUMÉRIQUES : VOCABULAIRE ET PREMIERS THÉORÈMES

Définition. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La **série de terme général** u_n , notée $\sum u_n$, est la donnée de la suite (S_n) de ses **sommes partielles** $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Elle **converge** si (S_n) converge ; sa limite est alors sa **somme** $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, et $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est son **reste d'ordre** n (qui tend vers 0). Sinon elle **diverge**. La **nature** d'une série est le fait qu'elle converge ou qu'elle diverge.

✗ ATTENTION — Trois objets à ne jamais confondre

La suite (u_n) , la suite des sommes partielles (S_n) et, lorsqu'elle existe, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. « La série tend vers 0 » n'a aucun sens ; et le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est **interdit tant que la convergence n'est pas établie**.

Notation. Si (u_n) n'est définie qu'à partir de n_0 , on note $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Modifier un nombre *fini* de termes ne change pas la nature de la série (mais change la somme).

Propriété — linéarité. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent et si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, de somme $\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, $\sum (u_n + v_n)$ diverge (la somme de deux séries divergentes est de nature indéterminée). Pour $u_n \in \mathbb{C}$, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent, et alors $\operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n)$.

Théorème — condition nécessaire. Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \rightarrow 0$. Par contraposée, si (u_n) ne tend pas vers 0, $\sum u_n$ diverge : on dit qu'elle **diverge grossièrement**. *Idée de preuve (exigible) :* $u_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0$.

Remarque. La réciproque est **fausse** : $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge. *Ce critère ne démontre jamais une convergence.*

Théorème — lien suite-série. Soit (a_n) une suite de $\mathbb{K}$. La suite (a_n) converge si et seulement si la série télescopique $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge, et alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim a_n - a_0$. *Idée de preuve (exigible) :* $\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$ (télescopage) ; les suites (S_n) et (a_{n+1}) ne diffèrent que de la constante a_0 .

Méthode — deux lectures d'un même énoncé. pour étudier une suite, étudier la série de ses accroissements ; pour sommer une série, chercher à écrire $u_n = a_{n+1} - a_n$ (télescopage).

2 LES SÉRIES DE RÉFÉRENCE

Théorème — série géométrique. Soit $q \in \mathbb{C}$. La série $\sum q^n$ converge **si et seulement si** $|q| < 1$, et alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{n=N}^{+\infty} q^n = \frac{q^N}{1-q}, \quad R_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Idée de preuve (exigible). Si $q \neq 1$, $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et $q^n \rightarrow 0$ dès que $|q| < 1$; si $|q| \geq 1$, $|q^n| \geq 1$ ne tend pas vers 0 (divergence grossière), et $S_n = n+1$ si $q = 1$.

Théorème — séries de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge **si et seulement si** $\alpha > 1$. En particulier la série **harmonique** $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. *Démonstration exigible, par la méthode des rectangles (ci-dessous).*

Théorème — exponentielle. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Idée de preuve. Convergence absolue : pour $n \geq N \geq 2|z|$ on a $\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2} \frac{|z|^n}{n!}$, donc $\frac{|z|^n}{n!} \leq \frac{|z|^N}{N!} 2^{N-n}$: domination par une série géométrique. *Somme :* la formule de Taylor avec reste intégral (chapitre 21) appliquée à $g : t \mapsto e^{tz}$ sur $[0; 1]$, de classe C^∞ avec $g^{(k)}(t) = z^k e^{tz}$, donne $e^z - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} = \frac{z^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{tz} dt$, de module majoré par $\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|z|} \rightarrow 0$.

3 SÉRIES À TERMES POSITIFS OU NULS

Théorème — critère fondamental. Si $u_n \geq 0$ pour tout n , la suite (S_n) est croissante et $\sum u_n$ converge $\iff (S_n)$ est majorée. Sinon $S_n \rightarrow +\infty$, et l'on écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème — comparaison et équivalence. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles.

■ FORMULAIRE

- **Comparaison** : si $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$ (avec $\sum u_n \leq \sum v_n$), et la divergence de $\sum u_n$ entraîne celle de $\sum v_n$.
- **Équivalence** : si (u_n) et (v_n) sont **positives** à partir d'un certain rang et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de **même nature**.

Idées de preuve (exigibles). Comparaison : $S_n \leq T_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$, donc (S_n) est croissante majorée. Équivalence : pour n assez grand $\frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n$ (définition de $\sim$ avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$), puis comparaison dans les deux sens.

✗ ATTENTION

Le **signe constant** est indispensable : avec $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, on a $u_n \sim v_n$ alors que $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ diverge. Et l'équivalence ne donne jamais l'égalité des sommes, seulement la même nature.

Théorème — méthode des rectangles. Soit f continue par morceaux et décroissante sur $[1; +\infty[$. Pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt,$$

d'où, en sommant de $k = 2$ à $k = n$ et en télescopant (Chasles),

$$\int_2^{n+1} f \leq \sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f.$$

Si de plus $f \geq 0$, la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $(\int_1^n f)_{n \geq 1}$ est majorée.

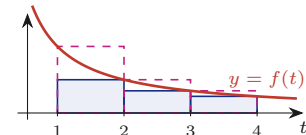


Figure 1 — f décroissante : le rectangle de hauteur $f(k)$ posé à droite de k est sous la courbe, celui posé à gauche est au-dessus.

Méthode — nature des séries de Riemann, démonstration exigible. on applique le théorème à $f : t \mapsto t^{-\alpha}$, positive décroissante sur $[1; +\infty[$ dès que $\alpha > 0$. Si $\alpha \leq 0$, $\frac{1}{n^\alpha} \not\rightarrow 0$: divergence grossière. Si $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$, $\int_1^n t^{-\alpha} dt = \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$, suite majorée si et seulement si $\alpha > 1$. Si $\alpha = 1$, $\int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n \rightarrow +\infty$: divergence, et l'encadrement donne $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$, donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.

4 CONVERGENCE ABSOLUE ET SÉRIES ALTERNÉES

Définition. $\sum u_n$ (à termes dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est **absolument convergente** si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

Théorème. Toute série absolument convergente converge, et $|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. **Critère de domination** : si (u_n) est à valeurs complexes, (v_n) à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Idée de preuve (exigible). Cas réel : $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ sont positifs, majorés par $|u_n|$, et $u_n = u_n^+ - u_n^-$; les séries $\sum u_n^\pm$ convergent par comparaison, puis $\sum u_n$ par linéarité. Cas complexe : séparer Re et Im , majorés en module par $|u_n|$.

✗ ATTENTION

La réciproque est fautive : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge sans converger absolument (série *semi-convergente*). Au programme, les seules séries *semi-convergentes* étudiées sont celles fournies par le théorème des séries alternées. Le **critère de Cauchy** est hors programme, et la **règle de d'Alembert** ne figure pas au programme.

Théorème — séries alternées. Soit (u_n) une suite réelle **positive, décroissante, de limite nulle**. Alors $\sum (-1)^n u_n$ **converge**, et en notant S sa somme :

■ FORMULAIRE

- $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$: les sommes partielles d'indice pair majorent S , celles d'indice impair la minorent ;
- R_n est du **signe de** $(-1)^{n+1}$, c'est-à-dire du signe du premier terme négligé ;
- $|R_n| \leq u_{n+1}$: le reste est majoré par le **premier terme négligé** ; en particulier $0 \leq S \leq u_0$.

Idée de preuve (exigible). (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont **adjacentes** : $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0$ et $S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1} \rightarrow 0$; elles convergent donc vers une limite commune S avec $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$, d'où $R_{2n} \in [-u_{2n+1} ; 0]$ et $R_{2n+1} \in [0 ; u_{2n+2}]$.

Remarque — la décroissance est indispensable. et doit être *démontrée* : avec $u_{2k} = \frac{1}{k+1}$ et $u_{2k+1} = \frac{1}{(k+1)^2}$, la suite (u_n) tend vers 0 sans être décroissante, et $\sum (-1)^n u_n$ diverge.

5 FAMILLES SOMMABLES DE RÉELS POSITIFS

Notation — calcul dans $[0 ; +\infty[$. on prolonge l'ordre et l'addition de $\mathbb{R}_+$ à $[0 ; +\infty[= \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ par $x \leq +\infty$ et $x + (+\infty) = +\infty$. Toute partie non vide A y admet une **borne supérieure** : $\sup A$ au sens usuel si A est majorée dans $\mathbb{R}$, et $+\infty$ sinon.

Définition. Soient I un ensemble **quelconque**, $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble de ses parties **finies** et $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0 ; +\infty[$. On pose

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{i \in F} u_i ; F \in \mathcal{F}(I) \right\} \in [0 ; +\infty[$$

(avec $\sum_{i \in \emptyset} u_i = 0$). La famille est **sommable** lorsque $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.

Remarque. Cette définition n'utilise *aucun ordre* sur I : on somme « en vrac ». Elle redonne la somme usuelle si I est fini ; pour $I = \mathbb{N}$, une famille positive $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ converge, avec la même somme.

Propriété — opérations. Pour $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ à valeurs dans $[0 ; +\infty[$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$: $\sum_{i \in I} (u_i + v_i) = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$, $\sum_{i \in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i$, et $u_i \leq v_i$ pour tout i entraîne $\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$. Pour toute bijection $\sigma : J \rightarrow I$, $\sum_{j \in J} u_{\sigma(j)} = \sum_{i \in I} u_i$: la somme est **invariante par permutation**.

Théorème — sommation par paquets, puis Fubini positif. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0 ; +\infty[$.

- Si $(I_j)_{j \in J}$ est une **partition** de I , alors, dans $[0 ; +\infty[$, $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$.
- Cas d'un produit : pour une famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$, $\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)$,

en partitionnant $I \times J$ en « lignes » $\{i\} \times J$ puis en « colonnes » $I \times \{j\}$. La démonstration est hors programme.

✗ ATTENTION

Ces égalités valent **sans aucune hypothèse de sommabilité** : la positivité seule les justifie, et chaque membre est fini si et seulement si l'autre l'est — c'est précisément ainsi qu'on établit la sommabilité. Pour une famille de signe variable, c'est faux sans sommabilité préalable.

6 FAMILLES SOMMABLES DE NOMBRES COMPLEXES

Définition. Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes est **sommable** si $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$; l'ensemble de ces familles se note $\ell^1(I)$. On lui associe alors un unique nombre complexe $\sum_{i \in I} u_i$, qui prolonge la somme finie. Pour $I = \mathbb{N}$, $(u_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$ équivaut à la convergence absolue de $\sum u_n$, et $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Propriété. Soient $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

■ FORMULAIRE

- **Domination** : si $(w_i)_{i \in I}$ est complexe, (v_i) positive sommable et $|w_i| \leq v_i$ pour tout i , alors $(w_i) \in \ell^1(I)$.
- **Linéarité** : $(\lambda u_i + \mu v_i) \in \ell^1(I)$ et $\sum_{i \in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$; de plus $|\sum_{i \in I} u_i| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$ et $\sum_{i \in I} \overline{u_i} = \overline{\sum_{i \in I} u_i}$.

- **Sous-famille** : pour toute partie $J \subset I$, $(u_i)_{i \in J}$ est sommable. **Invariance par permutation** : pour toute bijection $\sigma : J \rightarrow I$, $\sum_{j \in J} u_{\sigma(j)} = \sum_{i \in I} u_i$.
- **Approximation** : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $F \in \mathcal{F}(I)$ tel que $|\sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in F} u_i| \leq \varepsilon$.

Théorème — paquets et Fubini. Soit $(u_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$ et $(I_j)_{j \in J}$ une partition de I . Alors chaque $(u_i)_{i \in I_j}$ est sommable, la famille $(\sum_{i \in I_j} u_i)_{j \in J}$ est sommable et $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} (\sum_{i \in I_j} u_i)$. En particulier, si $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable,

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right).$$

La démonstration est hors programme.

Méthode — la pratique recommandée par le programme. mener d'abord le **calcul formel** (échange de sommes, regroupement par paquets), puis le justifier : la sommabilité s'obtient en appliquant Fubini positif à la famille des *modules*, ce qui est toujours licite.

Théorème — famille produit, puis produit de Cauchy. Si $(a_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$ et $(b_{i'})_{i' \in I'} \in \ell^1(I')$, alors $(a_i b_{i'}) \in \ell^1(I \times I')$ et $\sum_{(i,i')} a_i b_{i'} = (\sum_{i \in I} a_i) (\sum_{i' \in I'} b_{i'})$ (extension à un nombre fini de familles sommables, sans rédaction de la démonstration). En particulier, si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont **absolument convergents** et si $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, alors $\sum c_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

Idée de preuve. La famille $(a_p b_q)$ est sommable sur $\mathbb{N}^2$; on la somme par paquets selon les **diagonales** $I_n = \{(p, q), p + q = n\}$, qui partitionnent $\mathbb{N}^2$, et l'on a $\sum_{(p,q) \in I_n} a_p b_q = c_n$.

Remarque — l'exponentielle est un morphisme. avec $a_n = \frac{z^n}{n!}$ et $b_n = \frac{z'^n}{n!}$, la formule du binôme donne $c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}$, d'où $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$: on retrouve que $\exp$ est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

► SAVOIR-FAIRE

- Conclure à la divergence grossière ; reconnaître une série géométrique, de Riemann, l'exponentielle ; sommer par télescopage. Série à termes positifs : comparer, équivalencer, encadrer par la méthode des rectangles.
- Signe variable : convergence absolue par domination, ou théorème des séries alternées *après avoir démontré la décroissance*. Majorer un reste : $|R_n| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}$ (géométrique), $|R_n| \leq u_{n+1}$ (alternée), encadrement par rectangles.
- Justifier la sommabilité d'une famille double par Fubini positif, puis calculer par paquets ou par Fubini ; appliquer le produit de Cauchy.

★ EXEMPLE — trois réflexes

- **Équivalence.** $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n^2}) \geq 0$ et $u_n \sim \frac{1}{n^2}$: la série converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).
- **Alternée.** $(\frac{1}{\sqrt{n+1}})$ est positive, décroissante, de limite nulle : $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge, sans converger absolument ($\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$), et $|R_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$.
- **Fubini.** Pour $u_{p,q} = \frac{1}{2^p 3^q} \geq 0$ sur $\mathbb{N}^2$, Fubini positif donne $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = (\sum_{p \geq 0} 2^{-p}) (\sum_{q \geq 0} 3^{-q}) = 2 \times \frac{3}{2} = 3$: famille sommable de somme 3.

✗ PIÈGES

- Écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ avant d'avoir prouvé la convergence ; dire « la série tend vers 0 » ; conclure de $u_n \rightarrow 0$ à la convergence ; appliquer comparaison ou équivalence à une série dont le terme général *change de signe* ; croire que $u_n \sim v_n$ donne l'égalité des sommes.
- Oublier la **décroissance** (séries alternées) ou la **monotonie** (rectangles) ; intervertir deux sommations infinies sans justifier la sommabilité *sur les modules*.
- Utiliser le critère de Cauchy ou la règle de d'Alembert (hors programme) ; parler d'ensemble « dénombrable » (le programme indexe par un I quelconque et somme sur les parties *finies*).