

# Fiche de cours Primitives et équations différentielles

## Calcul de primitives, équations linéaires d'ordre 1 et 2

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

### 1 PRIMITIVES : DÉFINITION ET DESCRIPTION

**Notation.** Dans toute la fiche,  $I$  désigne un **intervalle** de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point, et  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Les fonctions considérées sont définies sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

**Définition.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ . Une **primitive** de  $f$  sur  $I$  est une fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{K}$  dérivable sur  $I$  telle que  $F' = f$  sur  $I$ .

**Théorème — description de l'ensemble des primitives.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  admettant une primitive  $F_0$  sur  $I$ . Alors les primitives de  $f$  sur  $I$  sont exactement les fonctions  $F_0 + C$ ,  $C \in \mathbb{K}$  constante. En particulier, deux primitives de  $f$  sur  $I$  diffèrent d'une constante, et pour tout  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$  il existe une **unique** primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$  telle que  $F(x_0) = y_0$ .

*Idée de preuve (exigible).* Si  $F' = F'_0 = f$ , alors  $(F - F_0)' = 0$  sur  $I$ ; or une fonction dérivable de dérivée nulle sur un intervalle est constante. Réciproquement  $(F_0 + C)' = f$ . Pour l'unicité :  $F = F_0 + (y_0 - F_0(x_0))$  est la seule possible.

✖ **ATTENTION** — le mot « intervalle » est une hypothèse, pas un décor

Sur  $\mathbb{R}^*$ , qui n'est pas un intervalle,  $F_1 : x \mapsto \ln |x|$  et  $F_2 : x \mapsto \ln |x| + 1$  (où 1 vaut 1 sur  $\mathbb{R}_+^*$  et 0 sur  $\mathbb{R}_-^*$ ) vérifient toutes deux  $F' = \frac{1}{x}$ , mais  $F_2 - F_1$  n'est pas constante. On primitive **sur un intervalle**, avec **une constante par intervalle**.

**Propriété — lien avec l'intégrale, admis à ce stade.** Si  $f$  est continue sur  $I$  et  $x_0 \in I$ , alors  $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. *Rappelé sans démonstration ; la théorie de l'intégration viendra plus tard dans l'année.*

**Notation.** On note  $\int f(t) dt$  une primitive générique de  $f$  : une égalité entre telles écritures s'entend à une constante près, sur un intervalle qu'il faut préciser. Enfin  $F$  primitive  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  si et seulement si  $\operatorname{Re}(F)$  primitive  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(F)$  primitive  $\operatorname{Im}(f)$ ; et si  $F$  primitive  $f$ ,  $G$  primitive  $g$ , alors  $\lambda F + \mu G$  primitive  $\lambda f + \mu g$ .

### 2 PRIMITIVES USUELLES

■ **FORMULAIRE** — à connaître dans les deux sens

| $f(x)$                                                                       | primitive                       | sur                                  |
|------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|
| $x^n, n \in \mathbb{N}$                                                      | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$           | $\mathbb{R}$                         |
| $x^\alpha, \alpha \neq -1$                                                   | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ | $\mathbb{R}_+^*$                     |
| $\frac{1}{x}$                                                                | $\ln  x $                       | $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$                                                         | $2\sqrt{x}$                     | $\mathbb{R}_+^*$                     |
| $\ln x$                                                                      | $x \ln x - x$                   | $\mathbb{R}_+^*$                     |
| $e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C}^*$                                    | $\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}$ | $\mathbb{R}$                         |
| où $I_k = ]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$ . |                                 |                                      |

| $f(x)$                                     | primitive                                  | sur          |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------|
| $\cos x; \sin x$                           | $\sin x; -\cos x$                          | $\mathbb{R}$ |
| $\operatorname{ch} x; \operatorname{sh} x$ | $\operatorname{sh} x; \operatorname{ch} x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$        | $\tan x$                                   | $I_k$        |
| $\tan x$                                   | $-\ln  \cos x $                            | $I_k$        |
| $\frac{1}{1+x^2}$                          | $\operatorname{Arctan} x$                  | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$                   | $\operatorname{Arcsin} x$                  | $] -1; 1[$   |

### 3 RECONNAÎTRE UNE DÉRIVÉE DE COMPOSÉE

**Méthode — la forme  $u' \times (g \circ u)$ .** si  $G$  primitive  $g$  et si  $u$  est dérivable à valeurs dans le domaine de  $G$ , alors  $(G \circ u)' = u' \times (g \circ u)$  :  $G \circ u$  est une primitive de  $u' (g \circ u)$ . Tout consiste à repérer le facteur  $u'$ .

■ **FORMULAIRE** — les six formes à reconnaître au premier coup d'œil

- $u' u^\alpha \rightarrow \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$  pour  $\alpha \neq -1$  (si  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , il faut  $u > 0$  sur l'intervalle);
- $\frac{u'}{u} \rightarrow \ln |u|$  (sur un intervalle où  $u$  ne s'annule pas);  $u' e^u \rightarrow e^u$ ;
- $\frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u}$  ( $u > 0$ );  $\frac{u'}{1+u^2} \rightarrow \text{Arctan } u$ ;  $u' \cos u \rightarrow \sin u$ ;
- cas particulier constamment utilisé : une primitive de  $x \mapsto f(ax+b)$  ( $a \neq 0$ ) est  $x \mapsto \frac{1}{a} F(ax+b)$ , où  $F$  primitive  $f$ .

#### 4 PRIMITIVES DE $e^{\lambda x}$ AVEC $\lambda \in \mathbb{C}$ , ET DE $e^{ax} \cos(bx)$

**Théorème.** Pour  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , la fonction  $x \mapsto \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $x \mapsto e^{\lambda x}$ .

*Idée de preuve.* La dérivée de  $x \mapsto e^{\varphi(x)}$  est  $\varphi' e^{\varphi}$  pour  $\varphi$  dérivable à valeurs complexes (chapitre 6); avec  $\varphi(x) = \lambda x$  on obtient  $\left(\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right)' = e^{\lambda x}$ .

**Méthode — primitives de  $e^{ax} \cos(bx)$  et  $e^{ax} \sin(bx)$ .** soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ , et  $\lambda = a + ib \neq 0$ . Comme  $e^{ax} \cos(bx) = \text{Re}(e^{\lambda x})$  et  $e^{ax} \sin(bx) = \text{Im}(e^{\lambda x})$ , on primitive  $e^{\lambda x}$  puis on prend la partie réelle ou imaginaire :

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \text{Re} \left( \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} \right) = e^{ax} \frac{a \cos(bx) + b \sin(bx)}{a^2 + b^2},$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \text{Im} \left( \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} \right) = e^{ax} \frac{a \sin(bx) - b \cos(bx)}{a^2 + b^2}.$$

On n'apprend pas ces deux formules : on refait le calcul, en multipliant  $\frac{1}{a+ib}$  par  $\frac{a-ib}{a^2+b^2}$ . Deux intégrations par parties successives donnent le même résultat, plus lentement.

#### 5 PRIMITIVES DE $\frac{1}{ax^2+bx+c}$

**Méthode.** Soient  $a \neq 0$  et  $\Delta = b^2 - 4ac$ . On travaille sur un intervalle où le dénominateur ne s'annule pas.

- Si  $\Delta > 0$ , le trinôme a deux racines réelles  $r_1 \neq r_2$  et  $\frac{1}{a(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{1}{a(r_1-r_2)} \left( \frac{1}{x-r_1} - \frac{1}{x-r_2} \right)$  : on obtient des logarithmes.
- Si  $\Delta = 0$ , avec  $r = -\frac{b}{2a}$  :  $\frac{1}{a(x-r)^2}$ , de primitive  $-\frac{1}{a(x-r)}$ .
- Si  $\Delta < 0$ , on écrit la **forme canonique**  $ax^2 + bx + c = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \omega^2 \right]$  avec  $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2|a|} > 0$ , puis on reconnaît  $\frac{u'}{1+u^2}$  avec  $u(x) = \frac{1}{\omega} \left(x + \frac{b}{2a}\right)$  : une primitive est  $\frac{1}{a\omega} \text{Arctan}(u(x))$ .

Pour  $\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$ , on fait apparaître au numérateur la dérivée  $2ax + b$  du dénominateur (ce qui donne un  $\ln |\cdot|$ ); il reste un terme en  $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ .

#### 6 INTÉGRATION PAR PARTIES

**Théorème — IPP pour les primitives.** Soient  $u, v : I \rightarrow \mathbb{K}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . Si  $H$  est une primitive de  $uv'$  sur  $I$ , alors  $uv - H$  est une primitive de  $u'v$  sur  $I$ ; on écrit  $\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx$ . *Preuve :*  $(uv)' = u'v + uv'$ , donc  $u'v = (uv)' - uv'$ ; on primitive cette égalité.

**Méthode — choix de  $u'$  et de  $v$ .** on prend pour  $v$  le facteur que la dérivation simplifie ( $x^n, \ln, \text{Arctan}, \text{Arcsin}$ ) et pour  $u'$  celui que l'on sait primitiver sans peine ( $e^{\lambda x}, \cos, \sin, x^n$ ) :  $\int x^n e^x dx$  demande  $n$  IPP avec  $v = x^n$ ;  $\int \ln x dx$  et  $\int \text{Arctan } x dx$  se traitent avec  $u' = 1$ ;  $\int e^x \cos x dx$  revient sur lui-même après deux IPP (on résout alors une équation d'inconnue « la primitive »).

#### 7 CHANGEMENT DE VARIABLE

**Théorème.** Soient  $f$  continue sur  $I$ ,  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ , et  $\varphi : J \rightarrow I$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $J$ . Alors  $F \circ \varphi$  est une primitive sur  $J$  de  $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$  :  $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t))$ . *Preuve :* c'est la dérivation d'une composée,  $(F \circ \varphi)' = \varphi' \times (f \circ \varphi)$ .

**Méthode — les deux sens d'usage.** *Sens direct* (« je reconnais  $\varphi' \times (f \circ \varphi)$  ») : on pose  $u = \varphi(t)$  et on primitive  $f$ . *Sens inverse* (« je pose  $x = \varphi(t)$  pour simplifier ») : on choisit  $\varphi : J \rightarrow I$  **de classe  $\mathcal{C}^1$  et bijective**, on calcule une primitive  $G$  de  $(f \circ \varphi)\varphi'$  sur  $J$ , et  $G \circ \varphi^{-1}$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ . Formellement :  $x = \varphi(t)$ ,  $dx = \varphi'(t) dt$ , puis retour à  $x$ .

✖ **ATTENTION**

Dans le sens inverse, la **bijektivité** de  $\varphi$  est indispensable : c'est elle qui permet de revenir à  $x$ . Ainsi  $x = \sin t$  n'est licite qu'après restriction de  $t$  à un intervalle où  $\sin$  est bijective, par exemple  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .

## 8 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

**Notation.** Soient  $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$  **continues**. On étudie

$$(E) : y' + a(x)y = b(x), \quad \text{et l'équation homogène associée } (H) : y' + a(x)y = 0.$$

Une **solution** de  $(E)$  sur  $I$  est une fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  dérivable sur  $I$  vérifiant l'égalité en tout point de  $I$ . On note  $\mathcal{S}_E$  et  $\mathcal{S}_H$  les ensembles de solutions sur  $I$ .

**Théorème — solutions de l'équation homogène.** Soit  $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$ . Alors

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto C e^{-A(x)}, C \in \mathbb{K} \right\}.$$

En particulier, si  $a$  est constante,  $\mathcal{S}_H = \{x \mapsto C e^{-ax}, C \in \mathbb{K}\}$ . Une solution de  $(H)$  qui s'annule en un point de  $I$  est identiquement nulle.

**Démonstration (exigible).** Pour  $y$  dérivable sur  $I$ , posons  $z = y e^A$  : alors  $z' = e^A (y' + ay)$ , et  $e^A$  ne s'annule pas. Donc  $y$  est solution de  $(H)$  si et seulement si  $z' = 0$  sur l'intervalle  $I$ , c'est-à-dire si et seulement si  $z$  est constante, soit  $y = C e^{-A}$ .

**Théorème — structure et superposition.** Si  $y_p$  est une solution de  $(E)$  sur  $I$ , alors

$$\mathcal{S}_E = \{y_p + y_h, y_h \in \mathcal{S}_H\} = \left\{ x \mapsto y_p(x) + C e^{-A(x)}, C \in \mathbb{K} \right\}.$$

De plus (**principe de superposition**) si  $b = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$  et si  $y_1, y_2$  sont solutions de  $y' + ay = b_1$  et  $y' + ay = b_2$ , alors  $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$  est solution de  $(E)$ . Les deux points résultent de la linéarité de  $y \mapsto y' + ay$  :  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $y - y_p$  est solution de  $(H)$ .

**Méthode — variation de la constante.** on cherche  $y$  sous la forme  $y(x) = C(x)e^{-A(x)}$  avec  $C$  dérivable. Le calcul donne  $y' + ay = C'(x)e^{-A(x)}$ , donc  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $C'(x) = b(x)e^{A(x)}$  : il suffit de prendre pour  $C$  une primitive de  $b e^A$  sur  $I$ . On obtient ainsi toutes les solutions d'un coup.

**Théorème — problème de Cauchy.** Soient  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{K}$ . Le problème  $(y' + a(x)y = b(x) \text{ et } y(x_0) = y_0)$  admet une **unique** solution sur  $I$ . *Preuve (exigible) :* les solutions sont les  $y = (C + K)e^{-A}$ ,  $K \in \mathbb{K}$ ; la condition  $y(x_0) = y_0$  s'écrit  $K = y_0 e^{A(x_0)} - C(x_0)$ , qui détermine  $K$  de manière unique.

## 9 RECOLLEMENT : QUAND LE COEFFICIENT DE $y'$ S'ANNULE

**Méthode — équation  $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$ .** si  $\alpha$  s'annule, l'équation n'est pas sous la forme  $(E)$  en ces points. On procède en trois temps : (1) *résolution* sur chaque intervalle où  $\alpha$  ne s'annule pas, avec **une constante par intervalle**; (2) *recollement* : on cherche à quelles conditions les morceaux se prolongent en une fonction dérivable sur l'intervalle entier (continuité, puis dérivabilité, puis vérification de l'équation au point de raccord); (3) *conclusion* : le nombre de constantes libres sur l'intervalle entier n'est en général plus le même.

★ **EXEMPLE —  $xy' - y = 0$  sur  $\mathbb{R}$**

Sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$ , l'équation s'écrit  $y' - \frac{1}{x}y = 0$  et donne  $y = C_1 x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $y = C_2 x$  sur  $\mathbb{R}_-^*$ , avec deux constantes indépendantes. Une solution sur  $\mathbb{R}$  vérifie  $0 \times y'(0) - y(0) = 0$ , donc  $y(0) = 0$  : le raccord est continu quels que soient  $C_1$  et  $C_2$ ; mais la dérivée à droite en 0 vaut  $C_1$ , celle à gauche  $C_2$ , et la dérivabilité impose  $C_1 = C_2$ . Les solutions sur  $\mathbb{R}$  sont donc les  $x \mapsto Cx$  : le recollement a fait disparaître un paramètre.

## 10 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

**Notation.** Soient  $a, b \in \mathbb{K}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  continue. On étudie

$$(E_2) : y'' + a y' + b y = f(x), \quad (H_2) : y'' + a y' + b y = 0.$$

L'équation caractéristique est  $r^2 + ar + b = 0$ , de discriminant  $\Delta = a^2 - 4b$ .

**Théorème — solutions de  $(H_2)$  à valeurs complexes.** Si  $r_1 \neq r_2$  sont les deux racines de l'équation caractéristique dans  $\mathbb{C}$ , les solutions de  $(H_2)$  sur  $I$  sont les  $x \mapsto C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ ; si  $r$  est racine double, ce sont les  $x \mapsto (C_1 x + C_2) e^{rx}$ , avec  $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$  dans les deux cas.

**Théorème — solutions réelles quand  $a, b \in \mathbb{R}$ .** Si  $a$  et  $b$  sont réels, les solutions à valeurs réelles de  $(H_2)$  sur  $I$  sont :

- $\Delta > 0$ , racines réelles  $r_1 \neq r_2$  :  $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ ,  $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ ;
- $\Delta = 0$ , racine double  $r = -\frac{a}{2}$  :  $y(x) = (C_1 x + C_2) e^{rx}$ ,  $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ ;
- $\Delta < 0$ , racines  $r = p \pm iq$  avec  $p = -\frac{a}{2}$  et  $q = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} > 0$  :

$$y(x) = e^{px} (C_1 \cos(qx) + C_2 \sin(qx)), \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,$$

que l'on peut aussi écrire  $y(x) = A e^{px} \cos(qx - \varphi)$  avec  $A \geq 0$  et  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

*Idée de preuve (exigible).* On pose  $y = e^{r_1 x} z$  : comme  $r_1^2 + ar_1 + b = 0$ , on obtient  $y'' + ay' + by = e^{r_1 x} (z'' + (2r_1 + a)z')$ , et  $2r_1 + a = r_1 - r_2$ . L'équation devient donc  $z'' + (r_1 - r_2)z' = 0$ , du premier ordre en  $z'$  : si  $r_1 \neq r_2$ ,  $z' = C e^{(r_2 - r_1)x}$  puis  $z = C_1 e^{(r_2 - r_1)x} + C_2$ ; si  $r_1 = r_2$ ,  $z'' = 0$  et  $z = C_1 x + C_2$ . Dans le cas réel avec  $\Delta < 0$ , les formules d'Euler font passer de  $(e^{(p+iq)x}, e^{(p-iq)x})$  à  $(e^{px} \cos(qx), e^{px} \sin(qx))$ .

**Théorème — structure et Cauchy.** Si  $y_p$  est une solution de  $(E_2)$  sur  $I$ , alors  $\mathcal{S}_{E_2} = \{y_p + y_h, y_h \in \mathcal{S}_{H_2}\}$  : les solutions forment une famille à deux constantes. Le principe de superposition s'applique comme à l'ordre 1. Enfin, pour  $x_0 \in I$  et  $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$ , il existe une unique solution de  $(E_2)$  sur  $I$  telle que  $y(x_0) = y_0$  et  $y'(x_0) = y_1$ . La démonstration de ce dernier point est hors programme.

**Méthode — solution particulière selon le second membre.** on note  $m \in \{0, 1, 2\}$  la multiplicité de  $\lambda$  comme racine de l'équation caractéristique ( $m = 0$  si  $\lambda$  n'en est pas racine).

- $f = P$  polynomiale de degré  $n$  :  $y_p$  polynomiale de degré  $n$  si  $b \neq 0$ ; de la forme  $xQ(x)$  avec  $\deg Q = n$  si  $b = 0$  et  $a \neq 0$ ; deux primitivations si  $a = b = 0$ .
- $f(x) = A e^{\lambda x}$  : on cherche  $y_p(x) = \mu x^m e^{\lambda x}$ ; le cas  $m \geq 1$  est le cas **résonant**. Plus généralement, pour  $f(x) = e^{\lambda x} P(x)$  :  $y_p(x) = x^m Q(x) e^{\lambda x}$  avec  $\deg Q = \deg P$ .
- $f(x) = B \cos(\omega x)$  ou  $B \sin(\omega x)$ , avec  $a, b$  réels : on résout  $y'' + ay' + by = B e^{i\omega x}$  puis on prend la partie réelle (ou imaginaire) d'une solution complexe.
- Second membre somme : on traite chaque terme séparément et on **additionne** (superposition).

#### ► SAVOIR-FAIRE

- Primitiver par lecture de la table, puis par reconnaissance de  $u' u^\alpha$ ,  $\frac{u'}{u}$ ,  $u' e^u$ ; primitiver  $e^{ax} \cos(bx)$  par l'exponentielle complexe et  $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$  selon le signe de  $\Delta$ .
- Mener une IPP, éventuellement répétée pour obtenir une relation de récurrence; conduire un changement de variable  $\mathcal{C}^1$  et bijectif.
- Résoudre  $y' + a(x)y = b(x)$  (homogène, variation de la constante, problème de Cauchy, recollement) et  $y'' + ay' + by = f$  (équation caractéristique, solutions réelles, solution particulière, cas résonant, conditions initiales).

#### ★ EXEMPLE — le cas résonant, à ne pas manquer

$y'' - 2y' + y = e^x$  : l'équation caractéristique  $(r - 1)^2 = 0$  a la racine double  $r = 1$ , donc  $\lambda = 1$  est racine de multiplicité  $m = 2$ . Avec  $y_p = \mu x^2 e^x$ , on trouve  $y_p'' - 2y_p' + y_p = 2\mu e^x$ , d'où  $\mu = \frac{1}{2}$  et  $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \left( \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \right) e^x, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

#### ✖ PIÈGES

- Primitiver sur un ensemble qui n'est pas un intervalle, mettre une seule constante sur une réunion d'intervalles, oublier la constante, ou écrire  $\int \frac{dx}{x} = \ln x$  sans valeur absolue.
- Écrire  $\int u' u^\alpha = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$  sans vérifier  $u > 0$  quand  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ; changement de variable non  $\mathcal{C}^1$  ou non bijectif, et oubli du retour à la variable initiale.
- Confondre solution particulière et solution générale; oublier le terme homogène ou l'ajouter deux fois; oublier la superposition quand le second membre est une somme.
- Chercher  $\mu e^{\lambda x}$  alors que  $\lambda$  est racine de l'équation caractéristique (cas résonant : il faut  $x^m$ ); laisser une réponse complexe quand les solutions réelles sont demandées ( $\Delta < 0$ ); croire que  $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$  avec  $\alpha(x_0) = 0$  se résout « comme d'habitude » au voisinage de  $x_0$ .