

Fiche de cours

Matrices et applications linéaires

Représentation matricielle, changements de bases, matrices équivalentes et rang, matrices semblables et trace

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

Dans toute la fiche $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; E, F, G sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie non nulle, $\dim E = p$, $\dim F = n$, $\dim G = q$. Le déterminant n'intervient pas dans ce chapitre : il est l'objet du chapitre 20.

1 COORDONNÉES D'UN VECTEUR, MATRICE D'UNE FAMILLE

Définition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{j=1}^p x_j e_j$; la **matrice de x dans $\mathcal{B}$** est la colonne

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}).$$

Propriété. L'application $x \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est un **isomorphisme** de E sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, que l'on identifie à $\mathbb{K}^p$: toute question linéaire sur E (liberté, rang, somme directe) se transporte en une question sur des colonnes de scalaires.

Définition. La **matrice d'une famille** $(x_1, \dots, x_m)$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ dont la j -ième colonne est $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_j)$. Son rang est le rang de la famille : celle-ci est libre si et seulement si ce rang vaut m , et c'est une base de E si et seulement si la matrice est carrée inversible.

2 MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE DANS UN COUPLE DE BASES

Définition. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. La **matrice de u dans le couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$** est $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall j \in \llbracket 1 ; p \rrbracket, \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i,$$

autrement dit : **la j -ième colonne est la colonne des coordonnées de $u(e_j)$ dans la base d'arrivée $\mathcal{C}$** . Pour un endomorphisme on prend $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ et l'on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

✖ ATTENTION

Le format est $n \times p$: **autant de lignes que la dimension de l'arrivée, autant de colonnes que la dimension du départ**, et les images s'écrivent *en colonnes*, jamais en lignes. Une matrice n'a aucun sens tant que les deux bases ne sont pas fixées : changer de base change la matrice, pas l'application.

Théorème — coordonnées de l'image. Avec les notations précédentes, pour tout $x \in E$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x), \quad \text{en abrégé } \boxed{Y = AX}.$$

Théorème — isomorphisme de représentation. L'application $u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ est un **isomorphisme d'espaces vectoriels** de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; en particulier $\dim \mathcal{L}(E, F) = np$. *Idée de preuve* : la linéarité vient de l'unicité des coordonnées, la bijectivité est le théorème de détermination d'une application linéaire par l'image d'une base (chapitre 17).

Théorème — matrice d'une composée. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ des bases de E, F, G . Alors

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)}.$$

Idée de preuve (exigible). Avec $A = (a_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$, $B = (b_{k,i}) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(v)$ et $\mathcal{D} = (g_k)$, la linéarité de v donne $v(u(e_j)) = \sum_i a_{i,j} v(f_i) = \sum_i a_{i,j} \sum_k b_{k,i} g_k = \sum_k (\sum_i b_{k,i} a_{i,j}) g_k$, et $\sum_i b_{k,i} a_{i,j}$ est le coefficient (k, j) de BA . C'est cette formule qui justifie la définition du produit matriciel.

Théorème — cas des endomorphismes. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . L'application $u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est un **isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux** de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$: elle transforme $\circ$ en produit matriciel et id_E en I_p . Par conséquent

$$u \in \text{GL}(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \text{GL}_p(\mathbb{K}), \quad \text{et alors} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^{-1}.$$

Plus généralement $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, et pour $k \in \mathbb{Z}$ si u est un automorphisme. Toute identité polynomiale en u se traduit donc en la même identité en A , et réciproquement.

★ **EXEMPLE — l'exemple du programme**

$\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel a pour base $(1, i)$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, la multiplication $m_{a+ib} : z \mapsto (a + ib)z$ est $\mathbb{R}$ -linéaire, et comme $m_{a+ib}(1) = a + ib$, $m_{a+ib}(i) = -b + ai$,

$$\text{Mat}_{(1,i)}(m_{a+ib}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Le produit de deux telles matrices redonne la matrice du produit : la multiplication des complexes est ce produit matriciel.

3 APPLICATION LINÉAIRE CANONIQUEMENT ASSOCIÉE À UNE MATRICE

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'**application linéaire canoniquement associée** à A est $u_A : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n, X \mapsto AX$. On pose alors $\text{Ker } A = \text{Ker } u_A$, $\text{Im } A = \text{Im } u_A$ et $\text{rg } A = \text{rg } u_A$.

Propriété. $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ où $C_1, \dots, C_p$ sont les **colonnes** de A ; donc $\text{rg } A = \text{rg}(C_1, \dots, C_p)$. Les **lignes** de A fournissent un système de n équations de $\text{Ker } A$. Enfin, pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et tout couple de bases, $\text{rg } u = \text{rg } \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$.

Théorème — théorème du rang, version matricielle. Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\dim \text{Ker } A + \text{rg } A = p$ (nombre de colonnes), et $\text{rg } A \leq \min(n, p)$.

Théorème — caractérisations de l'inversibilité. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \text{Ker } A = \{0\} \iff \text{rg } A = n \iff \text{les colonnes de } A \text{ engendrent } \mathbb{K}^n \iff u_A \in \text{GL}(\mathbb{K}^n).$$

De plus **toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible** : si $AB = I_n$ alors $BA = I_n$ et $B = A^{-1}$ — traduction du résultat « en dimension finie, un endomorphisme inversible d'un côté est inversible » (chapitre 17). Rappel du chapitre 13 : une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

4 SYSTÈMES LINÉAIRES

Propriété. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: le système $AX = B$ a p inconnues, n équations, et son **rang** est $\text{rg } A$. Les solutions de l'homogène $AX = 0$ forment $\text{Ker } A$, de dimension $p - \text{rg } A$. Le système est **compatible** $\iff B \in \text{Im } A \iff B$ est combinaison linéaire des colonnes de $A \iff \text{rg}(A \mid B) = \text{rg } A$; il a alors pour solutions le **sous-espace affine** $X_0 + \text{Ker } A$, de dimension $p - \text{rg } A$ (X_0 solution particulière). Un **système de Cramer** est un système avec A *carrée inversible* : solution unique $X = A^{-1}B$, pour tout B .

5 MATRICES DE PASSAGE ET CHANGEMENTS DE BASES

Définition. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ deux bases de E . La **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** est

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),$$

c'est-à-dire la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des *nouveaux* vecteurs dans l'*ancienne* base.

Propriété. $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ est inversible, $(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$, et $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}''}$. Réciproquement, si $\mathcal{B}$ est une base et $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$, les colonnes de P sont les coordonnées d'une unique base $\mathcal{B}'$ telle que $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

Théorème — changement de base pour un vecteur. Soit $x \in E$, $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ et $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$. Alors

$$X = PX', \quad \text{soit} \quad X' = P^{-1}X.$$

✗ **ATTENTION**

La matrice de passage « de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ » exprime les nouveaux vecteurs dans l'ancienne base, mais fait passer les *nouvelles* coordonnées aux *anciennes* : $X = PX'$ — l'erreur la plus fréquente du chapitre. Contrôle : P est la matrice de id_E de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$, et $Y = AX$ se lit « matrice $\times$ coordonnées de départ ».

Théorème — changement de bases pour une application linéaire. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de E , $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ des bases de F , $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$, $Q = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'}$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u)$. Alors

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Dans le cas d'un **endomorphisme** ($F = E, \mathcal{C} = \mathcal{B}, \mathcal{C}' = \mathcal{B}',$ donc $Q = P$) :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P.$$

Idée de preuve (exigible). On écrit $u = \text{id}_F \circ u \circ \text{id}_E$ et l'on applique deux fois la formule de la composée :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}(\text{id}_F) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E) = Q^{-1} A P.$$

Contrôle sur les coordonnées : $Y = AX, X = PX'$ et $Y = QY'$ donnent $QY' = APX'$, soit $Y' = Q^{-1}APX'$.

Méthode — chercher une base où la matrice est simple. on cherche des vecteurs remarquables — invariants ($u(x) = x$), du noyau, ou vérifiant $u(x) = \lambda x$ —, on vérifie qu'ils forment une base (famille libre de bon cardinal), on écrit P avec ces vecteurs en colonnes et l'on conclut $A' = P^{-1}AP$. Si A' est diagonale, $A^k = P A'^k P^{-1}$ est immédiat.

6 MATRICES ÉQUIVALENTES ET RANG

Définition. $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont **équivalentes** s'il existe $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = Q^{-1}AP$: ce sont les matrices d'une même application linéaire dans des couples de bases éventuellement différents. C'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Notation. Pour $0 \leq r \leq \min(n, p)$, on note $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (coefficients 1 aux r premières places diagonales, 0 ailleurs).

Théorème — forme réduite. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang r . Il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F telles que $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = J_r$. Par conséquent, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$\text{rg } A = r \iff A \text{ est équivalente à } J_r,$$

et **deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang** : le rang est le seul invariant de cette relation.

Idée de preuve (exigible). Soit $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base de $\text{Ker } u$, complétée en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E . Par le théorème du rang géométrique, $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\text{Im } u$; on la complète en une base $\mathcal{C}$ de F en posant $f_i = u(e_i)$ pour $i \leq r$. Alors $u(e_j) = f_j$ pour $j \leq r$ et $u(e_j) = 0$ sinon : la matrice est J_r .

Théorème — rang de la transposée. Pour toute $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\boxed{\text{rg}({}^t A) = \text{rg } A}$. Le rang d'une matrice est donc aussi le rang de la famille de ses lignes.

Idée de preuve (exigible). Si $r = \text{rg } A$, écrivons $A = QJ_rP^{-1}$ avec P, Q inversibles; en transposant, ${}^t A = {}^t(P^{-1}) {}^t J_r {}^t Q$, où ${}^t J_r$ est le J_r de format $p \times n$ et où ${}^t(P^{-1}), {}^t Q$ sont inversibles. Donc ${}^t A$ est équivalente à J_r , et $\text{rg } {}^t A = r$.

Propriété — opérations élémentaires. Les opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes) reviennent à multiplier à gauche (resp. à droite) par une matrice inversible : elles **conservent le rang**. Plus précisément, celles sur les *colonnes* conservent $\text{Im } A$, celles sur les *lignes* conservent $\text{Ker } A$. D'où la méthode : échelonner, compter les pivots.

Théorème — rang et matrices extraites. Une **matrice extraite** de A s'obtient en ne gardant que certaines lignes et certaines colonnes; on a toujours $\text{rg } A' \leq \text{rg } A$, et $\text{rg } A$ est la plus grande taille s d'une matrice *carrée* d'ordre s extraite de A et inversible.

7 MATRICES SEMBLABLES ET TRACE

Définition. $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. C'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Interprétation :* A et B sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme dans deux bases de E .

Remarque. Deux matrices semblables sont équivalentes (prendre $Q = P$), donc de même rang; **la réciproque est fausse** : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont équivalentes (même rang 1) mais non semblables (la première est un projecteur, la seconde est de carré nul).

Définition. La **trace** de $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ (somme des coefficients diagonaux).

Propriété. tr est une **forme linéaire** non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\text{tr } I_n = n$ et $\text{tr}({}^t A) = \text{tr } A$; l'ensemble des matrices de trace nulle est donc un **hyperplan** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension $n^2 - 1$.

Théorème — la propriété clé. Pour toutes $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$: $\boxed{\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)}$.

Démonstration (exigible). $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{j,i} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n b_{j,i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^p (BA)_{j,j} = \text{tr}(BA)$, l'interversion portant sur une somme finie.

Remarque. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ ne dit pas que $AB = BA$, et $\text{tr}(AB) \neq \text{tr} A \text{ tr} B$ en général; pour trois matrices, seules les permutations **circulaires** sont permises : $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$, mais $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$ en général.

Théorème — invariance par similitude. Si A et B sont semblables, alors $\text{rg} A = \text{rg} B$ et $\text{tr} A = \text{tr} B$. En effet $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr} A$ en appliquant la propriété clé à P^{-1} et AP .

Définition — trace d'un endomorphisme. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n$. Toutes les matrices de u dans les différentes bases de E sont semblables, donc ont la même trace : on appelle **trace de u** ce scalaire commun, noté $\text{tr} u$. C'est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$, avec $\text{tr} \text{id}_E = n$ et $\text{tr}(v \circ u) = \text{tr}(u \circ v)$.

Théorème — trace d'un projecteur. Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur ($p^2 = p$) alors $\boxed{\text{tr} p = \text{rg} p}$.

Démonstration (exigible). On a $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ (chapitre 17). En concaténant une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\text{Im } p$ et une base $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\text{Ker } p$, on obtient une base $\mathcal{B}$ de E adaptée. Comme p est l'identité sur $\text{Im } p$, $p(e_i) = e_i$ pour $i \leq r$ et $p(e_j) = 0$ pour $j > r$: donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = J_r$ avec $r = \text{rg} p$, et $\text{tr} p = r$.

Remarque. Le rang et la trace sont des invariants de similitude, mais ils ne la caractérisent pas : I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont même rang 2 et même trace 2 sans être semblables (une matrice semblable à I_2 est I_2). Pour **réfuter** une similitude : comparer rang, trace, trace des puissances, ou exhiber une relation polynomiale vérifiée par l'une et pas par l'autre.

► SAVOIR-FAIRE

- Écrire la matrice d'un vecteur, d'une famille, d'une application linéaire dans des bases données — y compris dans $\mathbb{K}_n[X]$ ou $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ — et retrouver u à partir de sa matrice.
- Calculer $\text{Ker } A$, $\text{Im } A$, $\text{rg } A$ par échelonnement, contrôler par le théorème du rang, décider de l'inversibilité; résoudre $AX = B$ et décrire les solutions comme sous-espace affine.
- Écrire une matrice de passage et son inverse; changer de base pour un vecteur ($X = PX'$), une application linéaire ($A' = Q^{-1}AP$), un endomorphisme ($A' = P^{-1}AP$), et en déduire A^k .
- Décider si deux matrices sont équivalentes (comparer les rangs) ou semblables (trace, rang, relations polynomiales); exhiber le couple de bases donnant J_r .
- Utiliser la trace : linéarité, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, invariance par similitude, trace d'un projecteur.

★ EXEMPLE — un changement de base mené jusqu'au bout

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$. On cherche $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$, c'est-à-dire $(4 - \lambda)x_1 - 2x_2 = 0$ et $x_1 + (1 - \lambda)x_2 = 0$: pour $\lambda = 2$, $v_1 = (1, 1)$ convient, et pour $\lambda = 3$, $v_2 = (2, 1)$. La famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ est libre (vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$, et

$$P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Contrôle : $\text{tr} A = 5 = 2 + 3$ et $\text{rg} A = 2 = \text{rg} A'$. On en déduit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = P \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^k - 2^k & 2^{k+1} - 2 \cdot 3^k \\ 3^k - 2^k & 2^{k+1} - 3^k \end{pmatrix}$.

★ EXEMPLE — lire un rang et une trace sur une application linéaire

Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $M \mapsto M + {}^tM$. Dans la base canonique $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$: $\varphi(E_{1,1}) = 2E_{1,1}$, $\varphi(E_{1,2}) = \varphi(E_{2,1}) = E_{1,2} + E_{2,1}$, $\varphi(E_{2,2}) = 2E_{2,2}$, donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, d'où $\text{rg} \varphi = 3$ et $\text{tr} \varphi = 6$. Le noyau est $\text{Vect}(E_{1,2} - E_{2,1})$, l'ensemble des matrices antisymétriques : $\dim \text{Ker } \varphi + \text{rg} \varphi = 1 + 3 = 4$. ✓

✖ PIÈGES

- Ranger les images *en lignes* au lieu de colonnes, ou se tromper de format : $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ a $\dim F$ lignes et $\dim E$ colonnes.
- Inverser une formule de changement de base : avec $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$, $X = PX'$ et $A' = P^{-1}AP$; entre deux espaces, $A' = Q^{-1}AP$.
- Confondre « équivalentes » (même rang) et « semblables » (même endomorphisme); conclure à la similitude par la trace et le rang.
- Croire que les opérations sur les lignes conservent l'image, ou celles sur les colonnes le noyau : seul le *rang* est conservé.
- Écrire $\text{tr}(AB) = \text{tr} A \text{ tr} B$, déduire $AB = BA$ de $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, ou appliquer $\text{tr} p = \text{rg} p$ à un p non projecteur.