

Fiche de cours Intégration

Continuité uniforme, fonctions continues par morceaux, intégrale sur un segment, sommes de Riemann, formules de Taylor globales

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

1 CONTINUITÉ UNIFORME ET THÉORÈME DE HEINE

Dans toute la fiche, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; les fonctions sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans K .

Définition. Soit f définie sur un intervalle I . On dit que f est **uniformément continue** sur I lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in I^2, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Remarque. Dans la continuité en tout point, « $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in I$ », le δ dépend de x ; dans la continuité uniforme, **le même δ convient pour tous les points** de I : le quantificateur $\forall x$ est passé *après* $\exists \delta$. Donc : uniformément continue $\implies$ continue, et la réciproque est fausse.

Propriété — cas lipschitzien. Si f est **lipschitzienne** sur I , c'est-à-dire s'il existe $k \geq 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour tous $x, y \in I$, alors f est uniformément continue sur I ($\delta = \frac{\varepsilon}{k+1}$ convient). En particulier, si f est de classe C^1 sur un *segment*, elle est lipschitzienne de rapport $k = \sup |f'|$ (inégalité des accroissements finis).

Théorème — théorème de Heine. Toute fonction continue sur un **segment** $[a; b]$ y est uniformément continue. (*Démonstration non exigible : par l'absurde, à l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass.*)

✖ ATTENTION — Le rôle exact de cette notion

La continuité uniforme n'est introduite qu'en **vue de la construction de l'intégrale** : l'étude systématique des fonctions uniformément continues n'est pas un attendu du programme. Contre-exemple à connaître : $x \mapsto x^2$ est continue mais *pas* uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (avec $x_n = n$ et $y_n = n + \frac{1}{n}$, $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ alors que $|f(x_n) - f(y_n)| \geq 2$). Sur un *segment*, Heine interdit ce phénomène.

2 SUBDIVISIONS, FONCTIONS EN ESCALIER, FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX

Définition. Une **subdivision** de $[a; b]$ est une famille finie $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ telle que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$; son **pas** est $\max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} (a_i - a_{i-1})$. Elle est **régulière** lorsque $a_i = a + i \frac{b-a}{n}$, son pas valant alors $\frac{b-a}{n}$.

Définition. $\varphi : [a; b] \rightarrow K$ est **en escalier** s'il existe une subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ de $[a; b]$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que φ soit *constante égale à λ_i sur chaque intervalle ouvert $]a_{i-1}; a_i[$* (les valeurs aux points a_i sont quelconques). Une telle subdivision est dite **adaptée** à φ .

Définition. $f : [a; b] \rightarrow K$ est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ de $[a; b]$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la restriction de f à $]a_{i-1}; a_i[$ soit continue et admette une *limite finie* à droite en a_{i-1} et à gauche en a_i .

Propriété. Les fonctions continues et les fonctions en escalier sur $[a; b]$ sont continues par morceaux, et une fonction continue par morceaux est **bornée**. L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a; b]$ est stable par $+$, par $\lambda \cdot$ ($\lambda \in K$), par produit, par $f \mapsto |f|$ et par restriction à un sous-segment.

✖ ATTENTION

« Continue par morceaux » exige des limites **finies** de part et d'autre de chaque point de la subdivision, et un **nombre fini** de morceaux : $x \mapsto \frac{1}{x}$ prolongée par 0 en 0 (limite infinie) et $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ prolongée par 0 (pas de limite en 0) ne sont pas continues par morceaux sur $[0; 1]$. En revanche $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est en escalier sur tout segment.

3 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX SUR UN SEGMENT

Théorème — existence, construction admise. À toute f continue par morceaux sur $[a; b]$ à valeurs dans K on associe un unique scalaire $\int_{[a; b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(t) dt$, égal à $\sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_{i-1})$ lorsque f est en escalier de valeurs λ_i sur les $]a_{i-1}; a_i[$, et possédant les propriétés ci-dessous. Le programme n'impose aucune construction particulière : on admet ce théorème.

Notation. La variable t est **muette**; deux fonctions continues par morceaux qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points ont la même intégrale. Lorsque f est réelle *positive*, $\int_a^b f$ est l'aire du domaine $\{(x, y), a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$; en général c'est une **aire algébrique** (comptée négativement sous l'axe).

Définition — extension aux bornes dans n'importe quel ordre. Pour f continue par morceaux sur un segment contenant a et b , on pose $\int_a^a f = 0$ et $\int_b^a f = -\int_a^b f$. Avec cette convention, la linéarité et la relation de Chasles restent valables *sans condition d'ordre* sur les bornes.

Propriété — propriétés fondamentales. Soient f, g continues par morceaux sur $[a; b]$ et $(\lambda, \mu) \in K^2$.

■ FORMULAIRE

- **Linéarité** : $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$ — l'intégrale est une forme linéaire sur l'espace des fonctions continues par morceaux sur $[a; b]$.
- **Positivité et croissance** : si $K = \mathbb{R}$ et $a \leq b$, alors $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$, et $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- **Chasles** : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ dès que f est continue par morceaux sur un segment contenant a, b et c .
- **Inégalité triangulaire** : si $a \leq b$, $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$, pour $K = \mathbb{R}$ comme pour $K = \mathbb{C}$. Si $K = \mathbb{C}$: $\int_a^b \overline{f} = \overline{\int_a^b f}$ et $\operatorname{Re}(\int_a^b f) = \int_a^b \operatorname{Re}(f)$ (de même pour Im).

Idées de preuve (exigibles). Linéarité et positivité s'obtiennent sur les fonctions en escalier (tout y est une somme finie) puis passent à la limite dans la construction; la croissance est la positivité appliquée à $g - f \geq 0$. L'inégalité triangulaire pour $K = \mathbb{R}$ vient de $-|f| \leq f \leq |f|$ et de la croissance; pour $K = \mathbb{C}$, on écrit $\int_a^b f = re^{i\theta}$ avec $r \geq 0$, puis $r = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} \int_a^b f) = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) \leq \int_a^b |f|$ car $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$.

Théorème — fonction continue positive d'intégrale nulle. Soit f continue sur $[a; b]$ ($a < b$), à valeurs **réelles positives**. Si $\int_a^b f = 0$, alors f est nulle sur $[a; b]$.

Idée de preuve (exigible). Par contraposée : si $f(x_0) > 0$ pour un x_0 , la continuité en x_0 fournit un segment $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$ de longueur $\ell > 0$ sur lequel $f \geq \frac{f(x_0)}{2}$; par Chasles et positivité, $\int_a^b f \geq \int_\alpha^\beta f \geq \frac{f(x_0)}{2} \ell > 0$.

Propriété — conséquences utiles. Soit f continue par morceaux sur $[a; b]$ avec $a < b$.

- **Valeur moyenne** de f sur $[a; b]$: $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.
- **Inégalité de la moyenne** : si f est réelle et $m \leq f \leq M$ sur $[a; b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$; et dans tous les cas $|\int_a^b f| \leq (b-a) \sup_{[a; b]} |f|$. (Conséquences immédiates de la croissance et de l'inégalité triangulaire, et non des résultats nommés par le programme : on les redémontre en une ligne.)
- **Parité** : si f est continue par morceaux sur $[-a; a]$ ($a > 0$), $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$ si f est paire, $\int_{-a}^a f = 0$ si f est impaire.
- **Périodicité** : si f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et T -périodique ($T > 0$), $x \mapsto \int_x^{x+T} f$ est constante, égale à $\int_0^T f$.

✗ ATTENTION — Les deux erreurs les plus coûteuses

Positivité et croissance exigent $a \leq b$: avec $a > b$ les inégalités sont renversées ($\int_1^0 t dt = -\frac{1}{2} \leq 0$ bien que $t \mapsto t$ soit positive). Et « $\int_a^b f = 0$ donc $f = 0$ » est **faux** sans les hypothèses *continue et de signe constant* : $\int_{-1}^1 t dt = 0$ sans que $t \mapsto t$ soit nulle.

4 SOMMES DE RIEMANN

Théorème — sommes de Riemann. Soit f continue par morceaux sur $[a; b]$, à valeurs dans K . Alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Le même résultat vaut pour les sommes à droite $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ (les deux sommes diffèrent de $\frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \rightarrow 0$).

*Idée de preuve (exigible **uniquement** pour f lipschitzienne).* Notons $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$ et S_n la somme. Par Chasles, $\int_a^b f - S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt$. Si f est k_0 -lipschitzienne, $|f(t) - f(x_k)| \leq k_0 |t - x_k| \leq k_0 h$ sur $[x_k; x_{k+1}]$, donc chaque terme est majoré en module par $k_0 h^2$ et

$$\left| \int_a^b f - S_n \right| \leq n k_0 h^2 = \frac{k_0(b-a)^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Le cas général se démontre avec le théorème de Heine; il est admis.

Méthode — reconnaître une somme de Riemann. pour calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$, on l'écrit comme somme de Riemann de g sur $[0; 1]$: la limite est $\int_0^1 g$. Le repère : un facteur $\frac{1}{n}$ devant la somme et une dépendance en k uniquement par $\frac{k}{n}$. Ainsi $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$.

Remarque — rectangles et trapèzes. Pour f de classe C^1 l'erreur des rectangles est en $O(\frac{1}{n})$; pour f de classe C^2 celle des trapèzes $T_n = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right)$ est en $O(\frac{1}{n^2})$: les trapèzes sont nettement plus performants. Si f est de plus convexe, T_n majore l'intégrale et la somme des milieux la minore.

5 LIEN ENTRE INTÉGRALE ET PRIMITIVE

Théorème — théorème fondamental. Soient I un intervalle, f continue sur I à valeurs dans K et $a \in I$. Alors la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est de classe C^1 sur I et $F' = f$. En particulier, **toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives**, et F est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

Idée de preuve (exigible). Pour $x \neq x_0$, $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt$ (Chasles); la continuité de f en x_0 majore l'intégrande par ε au voisinage de x_0 , donc le quotient par ε : la dérivée vaut $f(x_0)$.

Propriété — corollaire de calcul. Si f est continue sur I et si G est une primitive de f sur I , alors pour tous $a, b \in I$: $\int_a^b f(t) dt = [G(t)]_a^b = G(b) - G(a)$.

Propriété — composition. Si f est continue sur I et u, v dérivables sur J à valeurs dans I , alors $H : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ est dérivable et $H'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$ (écrire $H = F \circ v - F \circ u$). **Attention** : si f est seulement continue par morceaux, $F : x \mapsto \int_a^x f$ reste continue (et lipschitzienne) mais pas nécessairement dérivable aux discontinuités de f — pour $f = \lfloor \cdot \rfloor$, F n'est pas dérivable en 1.

Théorème — intégration par parties. Si u et v sont de classe C^1 sur un segment $[a; b]$, à valeurs dans K , alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Théorème — changement de variable. Si φ est de classe C^1 sur $[\alpha; \beta]$ et si f est continue sur un intervalle contenant $\varphi([\alpha; \beta])$, alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Aucune monotonie n'est requise dans ce sens. En revanche, pour calculer $\int_a^b f$ en posant $x = \varphi(t)$, il faut résoudre $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$: on prend φ de classe C^1 et **strictement monotone**. En pratique on écrit $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) dt$ et le tableau des **bornes** — les oublier est l'erreur la plus fréquente.

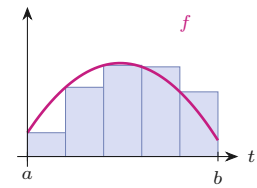


Figure 1 — Méthode des rectangles à gauche, $n = 5$: l'aire hachurée est $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$.

6 FORMULES DE TAYLOR GLOBALES

Théorème — formule de Taylor avec reste intégral. Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$ et f de classe C^{n+1} sur I à valeurs dans K . Alors, pour tous $a, x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt}_{\text{reste intégral } R_n(x)}.$$

Idée de preuve (exigible). Récurrence sur n ; pour $n = 0$, $\int_a^x f' = f(x) - f(a)$. Hérédité : dans $R_n(x)$ on intègre par parties en primitivant $t \mapsto \frac{(x-t)^n}{n!}$ en $t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et en dérivant $f^{(n+1)}$; le crochet donne $\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ et l'intégrale restante est $R_{n+1}(x)$.

Théorème — inégalité de Taylor-Lagrange. Soient f de classe C^{n+1} sur un intervalle I et $a, x \in I$. Si M_{n+1} majore $|f^{(n+1)}|$ sur le segment d'extrémités a et x , alors

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Idée de preuve (exigible). On majore le reste intégral : pour $x \geq a$, $|R_n(x)| \leq \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)| dt \leq M_{n+1} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = M_{n+1} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$; si $x \leq a$, on échange les bornes.

✖ ATTENTION — Global, local, et ce qui est hors programme

La formule de **Taylor-Young** (chapitre 15) est *locale* : elle n'exige que f de classe C^n mais ne donne qu'un $o((x-a)^n)$, sans contrôle quantitatif. Les formules ci-dessus sont **globales** : valables sur tout l'intervalle, elles fournissent une *majoration explicite* du reste — d'où leur usage pour les approximations et les majorations d'erreur. **L'égalité de Taylor-Lagrange** (existence d'un c tel que $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$) est **hors programme** : on ne l'invoque jamais. Enfin M_{n+1} doit majorer $|f^{(n+1)}|$ sur le **bon segment**, celui d'extrémités a et x .

➤ SAVOIR-FAIRE

- Découper par Chasles une intégrale contenant une valeur absolue ou une partie entière ; intégrer une fonction en escalier.
- Encadrer une intégrale qu'on ne sait pas calculer (croissance, inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne) et en déduire une limite ou un équivalent.
- Exploiter parité, imparité, périodicité, le changement de variable $t \mapsto a+b-t$; reconnaître une somme de Riemann et en calculer la limite ; majorer l'erreur pour f lipschitzienne ; comparer rectangles et trapèzes.
- Dériver $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f$, en déduire variations, limites et développements limités ; établir une relation de récurrence entre intégrales par parties.
- Écrire la formule de Taylor avec reste intégral et majorer ce reste par l'inégalité de Taylor-Lagrange pour approcher une valeur avec erreur contrôlée.

★ EXEMPLE — deux calculs types

Encadrement. Pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$ sur $[0; 1]$, donc $0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{n+1}$: cette intégrale tend vers 0. **Taylor-Lagrange.** Pour $f = \exp$, $a = 0$, $n = 3$, $x \in [0; 1]$: $|f^{(4)}(t)| = e^t \leq e$ sur $[0; 1]$, donc $\left| e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{e}{24} x^4 \leq 0,114$; avec $n = 8$, l'erreur est $\leq \frac{e}{9!} < 8 \times 10^{-6}$.

✖ PIÈGES

- Intégrer une inégalité avec $a > b$; croire que $\int |f| = |\int f|$; conclure $f = 0$ de $\int f = 0$ sans continuité ni signe constant.
- Écrire $F' = f$ pour f seulement continue par morceaux ; oublier $u'(x)$ et $v'(x)$ en dérivant $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f$.
- Intégrer par parties sans vérifier que u et v sont C^1 sur tout le segment ; changer de variable sans changer les bornes, ou avec un φ non injectif.
- Démontrer la convergence des sommes de Riemann sans hypothèse lipschitzienne (seul ce cas est exigible) ; invoquer l'égalité de Taylor-Lagrange ou Cauchy-Schwarz intégrale (chapitre 24), hors programme ici.