

Fiche de cours

Espaces vectoriels

Structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, sous-espaces, Vect, familles libres et bases, sommes directes

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

Dans toute la fiche, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les lettres n, p des entiers naturels non nuls, et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. *La dimension finie, le rang et les applications linéaires font l'objet du chapitre 17 : aucun énoncé de cette fiche ne les utilise.* Les espaces de dimension infinie n'y apparaissent qu'à travers les exemples $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et les espaces de fonctions, sans aucune étude générale.

1 STRUCTURE DE $\mathbb{K}$ -ESPACE VECTORIEL

Définition. Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un ensemble E muni d'une loi interne $+$ et d'une **loi externe** $\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ telles que $(E, +)$ soit un groupe abélien et que, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$,

$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x, \quad (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x), \quad 1 \cdot x = x.$$

Les éléments de E sont les **vecteurs**, ceux de $\mathbb{K}$ les **scalaires**; le neutre de $(E, +)$ est noté 0_E . On écrit λx pour $\lambda \cdot x$.

Propriété — règles de calcul. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$: $0_{\mathbb{K}}x = 0_E$, $\lambda 0_E = 0_E$, $(-1)x = -x$, et

$$\lambda x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E$$

Idée de preuve. $0_{\mathbb{K}}x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}})x = 0_{\mathbb{K}}x + 0_{\mathbb{K}}x$, d'où $0_{\mathbb{K}}x = 0_E$ en simplifiant dans le groupe $(E, +)$; si $\lambda x = 0_E$ avec $\lambda \neq 0$, alors $x = 1 \cdot x = (\lambda^{-1}\lambda)x = \lambda^{-1}(\lambda x) = 0_E$ — c'est ici qu'on utilise que $\mathbb{K}$ est un corps.

★ EXEMPLE — les espaces de référence

$\mathbb{K}^n$ et, plus généralement, tout **produit** $E_1 \times \dots \times E_p$ d'un nombre fini d'espaces (opérations composante par composante); $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X] = \{P, \deg P \leq n\}$; $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (la structure d'anneau n'intervient pas ici); $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (suites) et $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ (suites **presque nulles**, c'est-à-dire nulles à partir d'un certain rang); $\mathcal{F}(A, F)$, ensemble des applications d'un ensemble A dans un espace F , pour $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ et $(\lambda f)(a) = \lambda f(a)$.

✖ ATTENTION — le corps de base fait partie de la donnée

$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, mais aussi un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (en restreignant les scalaires) : une famille peut être libre pour l'une de ces structures et liée pour l'autre. Ainsi $(1, i)$ est liée dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$ (car $i = i \times 1$) et libre dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$. **Toujours préciser le corps de base.**

Définition. Une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de scalaires est **presque nulle** (ou à *support fini*) lorsque $\{i \in I, \lambda_i \neq 0\}$ est fini. Pour une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E , on appelle **combinaison linéaire** de cette famille tout vecteur $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$, où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille presque nulle de scalaires — la somme ne portant en réalité que sur l'ensemble fini des indices i tels que $\lambda_i \neq 0$. Pour une famille **finie** $(x_1, \dots, x_p)$ c'est simplement $\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k$, sans condition. Par convention, la combinaison linéaire de la famille vide est 0_E .

2 SOUS-ESPACES VECTORIELS

Définition. Une partie F de E est un **sous-espace vectoriel** de E lorsque F est non vide et stable par $+$ et par la loi externe. Un sous-espace vectoriel, muni des lois induites, est lui-même un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel; c'est de *très loin* la façon la plus économique de prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel.

Théorème — caractérisation d'un sous-espace vectoriel. Soit $F \subset E$. Alors

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff 0_E \in F \text{ et } \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \lambda x + \mu y \in F.$$

La condition « $0_E \in F$ » peut être remplacée par « $F \neq \emptyset$ », et la seconde par « $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in F^2, x + \lambda y \in F$ ».

Idée de preuve (exigible). Si F est un sous-espace, il est non vide : il contient un x , donc $0_E = 0_{\mathbb{K}}x$, et la stabilité donne $\lambda x + \mu y \in F$. Réciproquement, $0_E \in F$ donne $F \neq \emptyset$, et les choix $(\lambda, \mu) = (1, 1)$ puis $(\lambda, \mu) = (\lambda, 0)$ donnent les deux stabilités.

Méthode — rédaction type. pour montrer que F est un sous-espace vectoriel : (i) dire de quel espace E on prétend que F est un sous-espace, et vérifier $F \subset E$; (ii) vérifier $0_E \in F$; (iii) prendre $x, y \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ quelconques, et montrer $\lambda x + \mu y \in F$ en revenant à la condition qui définit F . Conclure.

★ EXEMPLE — sous-espaces usuels

$\{0_E\}$ et E (sous-espaces *triviaux*); pour $x_0 \neq 0$, la **droite vectorielle** $\mathbb{K}x_0$; dans $\mathbb{R}^3$, un **plan vectoriel** $\text{Vect}(u, v)$ avec u, v non colinéaires. — $\mathbb{K}_n[X]$ et $\{P \in \mathbb{K}[X], P(a) = 0\}$ dans $\mathbb{K}[X]$. — Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, diagonales, triangulaires supérieures, de trace nulle, commutant avec une matrice fixée; pas $\text{GL}_n(\mathbb{K})$, qui ne contient pas 0. — Dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$: suites bornées, convergentes, de limite nulle, presque nulles, vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. — Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: fonctions paires, impaires, bornées, continues, dérivables, de classe C^k , T -périodiques, nulles en 0, solutions d'une équation différentielle linéaire *homogène*.

Théorème — intersection. Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille *quelconque* non vide de sous-espaces vectoriels de E , alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Idée de preuve. 0_E appartient à chaque F_i donc à l'intersection; si x, y sont dans l'intersection et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x + \mu y \in F_i$ pour chaque i , donc dans l'intersection.

✖ ATTENTION — la réunion, elle, n'en est presque jamais un

Si F et G sont deux sous-espaces de E , alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel **si et seulement si** $F \subset G$ ou $G \subset F$. Dans $\mathbb{R}^2$, la réunion des deux axes n'est pas un sous-espace : elle contient $(1, 0)$ et $(0, 1)$, mais pas leur somme. Le bon objet est la *somme* $F + G$ (bloc 5).

Propriété — systèmes linéaires homogènes. Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble $\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$: l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$, dont la méthode du pivot fournit une famille génératrice explicite.

3 SOUS-ESPACE ENGENDRÉ PAR UNE PARTIE

Théorème — et définition. Soit A une partie de E . L'ensemble $\text{Vect}(A) = \{\sum_{k=1}^m \lambda_k a_k, m \in \mathbb{N}, \lambda_k \in \mathbb{K}, a_k \in A\}$ des combinaisons linéaires d'éléments de A (avec $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$, cas $m = 0$) est un sous-espace vectoriel de E contenant A , et c'est **le plus petit** : pour tout sous-espace vectoriel F de E ,

$$A \subset F \implies \text{Vect}(A) \subset F.$$

On l'appelle **sous-espace engendré** par A . C'est aussi l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A .

Idée de preuve (exigible). $\text{Vect}(A)$ contient 0_E et est stable par combinaison linéaire (concaténer deux combinaisons linéaires en donne une troisième) : c'est un sous-espace, et il contient A (cas $m = 1, \lambda_1 = 1$). Si F est un sous-espace contenant A , une récurrence sur m donne $\sum_{k=1}^m \lambda_k a_k \in F$, d'où $\text{Vect}(A) \subset F$. Ainsi $\text{Vect}(A)$ est l'un des sous-espaces contenant A et est inclus dans tous les autres : c'est leur intersection.

Notation. Pour une famille, on note $\text{Vect}((x_i)_{i \in I})$, et $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\}$ dans le cas fini.

Propriété. Pour $A, B \subset E$: $A \subset B \implies \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$; $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$; A est un sous-espace vectoriel $\iff \text{Vect}(A) = A$; enfin $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

Méthode — montrer $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(\mathcal{G})$. double inclusion, chacune par le théorème ci-dessus : il suffit de vérifier que *chaque* vecteur de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire de $\mathcal{G}$, et réciproquement. On ne vérifie jamais l'égalité « élément par élément ».

Propriété — opérations qui ne changent pas le Vect. On ne modifie pas $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ en permutant deux vecteurs, en multipliant l'un d'eux par un scalaire *non nul*, en lui ajoutant une combinaison linéaire des autres, ou en supprimant un vecteur combinaison linéaire des autres.

4 FAMILLES GÉNÉRATRICES, FAMILLES LIBRES, BASES

Définition. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est **génératrice** de E lorsque $\text{Vect}((x_i)_{i \in I}) = E$, c'est-à-dire lorsque tout vecteur de E est combinaison linéaire de la famille. On dit aussi qu'elle *engendre* E .

Définition. Une famille *finie* $(x_1, \dots, x_p)$ est **libre** lorsque

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Elle est **liée** dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une *relation linéaire non triviale* entre ses vecteurs. Une famille *quelconque* $(x_i)_{i \in I}$ est libre lorsque toute sous-famille finie est libre; de façon équivalente, lorsque la seule famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I}$ telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$ est la famille nulle.

Remarque — cas limites. la famille vide est libre et engendre $\{0_E\}$; (x) est libre $\iff x \neq 0_E$; (x, y) est liée $\iff x$ et y sont colinéaires; toute famille contenant 0_E ou deux fois le même vecteur est liée; toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Propriété — ajout d'un vecteur à une famille libre. Soient $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de E et $x \in E$. Alors

$$(x_1, \dots, x_p, x) \text{ est libre} \iff x \notin \text{Vect}(x_1, \dots, x_p).$$

Idée de preuve. Si $x = \sum \mu_k x_k$, la relation $\sum \mu_k x_k - x = 0$ est non triviale : la famille est liée. Réciproquement, d'une relation $\sum \lambda_k x_k + \lambda x = 0$ on tire, si $\lambda \neq 0$, que $x \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$; donc $\lambda = 0$, puis tous les λ_k sont nuls par liberté.

Théorème — polynômes de degrés distincts. Toute famille finie de polynômes *non nuls* de $\mathbb{K}[X]$ de degrés deux à deux distincts est libre.

Idée de preuve (exigible). Soient $P_1, \dots, P_m$ non nuls de degrés deux à deux distincts et $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m = 0$ avec les λ_k non tous nuls. Soit k_0 l'indice, parmi ceux tels que $\lambda_k \neq 0$, pour lequel $\deg P_{k_0}$ est *maximal* : il est unique puisque les degrés sont distincts. Le coefficient de $X^{\deg P_{k_0}}$ dans la somme vaut alors $\lambda_{k_0} \times (\text{coefficient dominant de } P_{k_0}) \neq 0$, ce qui contredit la nullité du polynôme. Donc tous les λ_k sont nuls.

Définition. Une **base** de E est une famille à la fois libre et génératrice de E .

Théorème — coordonnées. Une famille $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ de E est une base de E si et seulement si tout vecteur x de E s'écrit d'une unique manière $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ avec $(\lambda_i)_{i \in I}$ presque nulle. Les scalaires λ_i sont les **coordonnées** de x dans $\mathcal{B}$.

Idée de preuve (exigible). L'existence de l'écriture pour tout x est exactement le caractère générateur. Son unicité équivaut à la liberté : deux écritures d'un même x diffèrent par une relation linéaire nulle, et réciproquement une relation linéaire non triviale fournit deux écritures distinctes de 0_E .

■ FORMULAIRE — Les bases canoniques à connaître

- $\mathbb{K}^n$: $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ où $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 en k -ième position). Les coordonnées de x sont ses composantes.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, matrices élémentaires; les coordonnées de A sont ses coefficients $a_{i,j}$.
- $\mathbb{K}_n[X]$: $(1, X, \dots, X^n)$. $\mathbb{K}[X]$: $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ (famille *infinie*).
- $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$: $(\delta^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, où $\delta^{(k)}$ est la suite valant 1 au rang k et 0 ailleurs. Cette famille n'engendre pas $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Théorème — bases de degrés échelonnés. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P_0, \dots, P_n$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\deg P_k = k$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Alors $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Idée de preuve. La famille est libre (degrés deux à deux distincts, polynômes non nuls). Pour le caractère générateur, on montre par récurrence sur $m \in \llbracket 0; n \rrbracket$ que $\mathbb{K}_m[X] \subset \text{Vect}(P_0, \dots, P_m)$: si $\deg Q \leq m$ et si a est le coefficient de X^m dans Q , le polynôme $Q - \frac{a}{c_m} P_m$ (où $c_m \neq 0$ est le coefficient dominant de P_m) est de degré $\leq m - 1$.

★ EXEMPLE

Pour $a \in \mathbb{K}$, la famille $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$: les coordonnées de P dans cette base sont les $\frac{P^{(k)}(a)}{k!}$, par la formule de Taylor polynomiale (chapitre 14).

5 SOMME DE DEUX SOUS-ESPACES, SOMME DIRECTE

Définition. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Leur **somme** est

$$F + G = \{x + y, x \in F, y \in G\}.$$

Propriété. $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E , et c'est le plus petit sous-espace contenant $F \cup G$: $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$. De plus $F + G = F \iff G \subset F$. Si $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ et $G = \text{Vect}(\mathcal{G})$, alors $F + G = \text{Vect}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$: on obtient une famille génératrice de la somme en concaténant des familles génératrices.

Définition. La somme $F + G$ est **directe** lorsque tout vecteur de $F + G$ s'écrit d'une unique manière $x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$. On note alors $F \oplus G$.

Théorème — caractérisation d'une somme directe. $F + G$ est directe $\iff F \cap G = \{0_E\}$.

Idée de preuve (exigible). Si la somme est directe et $z \in F \cap G$, alors $z = z + 0_E = 0_E + z$ sont deux décompositions de z : l'unicité impose $z = 0_E$. Réciproquement, si $F \cap G = \{0_E\}$ et $x + y = x' + y'$ avec $x, x' \in F, y, y' \in G$, alors $x - x' = y' - y$ appartient à F et à G , donc est nul.

Définition. On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque $E = F \oplus G$, c'est-à-dire

$$F \cap G = \{0_E\} \quad \text{et} \quad F + G = E.$$

Méthode — montrer que $E = F \oplus G$. deux rédactions. **(1) Par les deux conditions :** montrer $F \cap G = \{0_E\}$ (prendre $z \in F \cap G$ et montrer $z = 0$), puis $F + G = E$ (partir de $x \in E$ et construire une décomposition). **(2) Par analyse-synthèse :** soit $x \in E$; on suppose $x = u + v$ avec $u \in F, v \in G$, on en déduit les seules valeurs possibles de u et v (unicité), puis on vérifie qu'elles conviennent (existence). La seconde donne les deux conditions d'un coup et fournit la décomposition explicite.

★ **EXEMPLE — les supplémentaires de référence**

$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ (fonctions paires, fonctions impaires), avec $f = \frac{f+\tilde{f}}{2} + \frac{f-\tilde{f}}{2}$ où $\tilde{f}(x) = f(-x)$. — $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, avec $A = \frac{A+tA}{2} + \frac{A-tA}{2}$. — $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_n[X] \oplus X^{n+1}\mathbb{K}[X]$: c'est la division euclidienne par X^{n+1} . — Dans $\mathbb{R}^3$, un plan vectoriel P et une droite vectorielle D non contenue dans P . — $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{u, \forall n, u_{2n} = 0\} \oplus \{u, \forall n, u_{2n+1} = 0\}$.

✗ **ATTENTION**

Supplémentaire $\neq$ complémentaire : deux supplémentaires ont toujours 0_E en commun. Un supplémentaire n'est **pas unique** : dans $\mathbb{R}^2$, la droite $\mathbb{R}(1, 0)$ admet pour supplémentaire $\mathbb{R}(0, 1)$, mais aussi $\mathbb{R}(1, 1)$, et toute autre droite qu'elle-même. On dit « un supplémentaire », jamais « le ». Enfin $F \cap G = \{0\}$ ne donne que le caractère *direct* de la somme : sans $F + G = E$, les sous-espaces ne sont pas supplémentaires dans E .

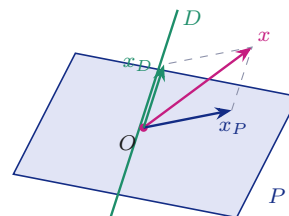


Figure 1 — $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$: tout vecteur x se décompose d'une seule façon en $x_P + x_D$, en « projetant » parallèlement à D puis à P .

➤ **SAVOIR-FAIRE**

- Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel *en le reconnaissant comme sous-espace* d'un espace de référence; montrer qu'une partie n'en est pas un ($0 \notin F$, ou contre-exemple de stabilité). Décrire un sous-espace par une famille génératrice (pivot sur un système homogène) et, inversement, décrire un Vect par des équations.
- Montrer qu'une famille est libre : partir de $\sum \lambda_k x_k = 0$ et en déduire $\lambda_k = 0$ — par identification de coefficients, évaluation en des points bien choisis, dérivation, passage à la limite, ou argument de degré.
- Montrer qu'une famille est une base : liberté et caractère générateur (aucun argument de dimension ici); calculer des coordonnées. Déterminer $F \cap G$ et $F + G$, décider si la somme est directe, montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires par analyse-synthèse.

★ **EXEMPLE — trois calculs types**

- **Un Vect par des équations.** Soit $F = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ dans $\mathbb{R}^3$. Alors $(x, y, z) \in F$ si et seulement s'il existe (λ, μ) tel que $x = \lambda, y = \lambda + \mu, z = \mu$, ce qui équivaut à $x - y + z = 0$: F est le plan vectoriel d'équation $x - y + z = 0$.
- **Une famille libre de fonctions.** Soit $\lambda_1 + \lambda_2 \cos + \lambda_3 \cos(2 \cdot) = 0$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En évaluant en $0, \frac{\pi}{2}, \pi$: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \lambda_1 - \lambda_3 = 0, \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$; la somme des deux équations extrêmes donne $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$, d'où $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ puis $\lambda_2 = 0$: la famille est libre.
- **Une somme directe.** Dans $\mathbb{R}_2[X]$, si $P = Q + c$ avec $Q(1) = 0$ et c constante, l'évaluation en 1 impose $c = P(1)$ et $Q = P - P(1)$, qui conviennent : $\mathbb{R}_2[X] = \{P, P(1) = 0\} \oplus \text{Vect}(1)$.

✗ **PIÈGES**

- Oublier de vérifier $0_E \in F$ (ou $F \neq \emptyset$) : c'est la moitié de la caractérisation, et le test qui élimine le plus vite les fausses pistes ($\text{GL}_n(\mathbb{K}), \{P, \deg P = n\}, \{P, P(0) = 1\}$, les suites croissantes).
- Confondre $F \cup G$ et $F + G$; croire que $F \cup G$ est un sous-espace; confondre supplémentaire et complémentaire; dire « le supplémentaire ».
- Conclure $E = F \oplus G$ à partir de la seule condition $F \cap G = \{0_E\}$: il manque $F + G = E$.
- Oublier les cas limites (famille vide, famille (0_E) , deux vecteurs égaux); écrire $\text{Vect}(\emptyset) = \emptyset$; ne pas préciser le corps de base et conclure à tort qu'une famille est liée ($(1, i)$ dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel).
- Manipuler une « combinaison linéaire infinie » : seules les familles presque nulles de scalaires ont un sens; ainsi $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, mais $(\delta^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ n'engendre pas $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- Utiliser un argument de dimension (« trois vecteurs libres de $\mathbb{R}^3$ forment une base ») : c'est le chapitre 17. Ici, une base se démontre en deux temps.