

Fiche de cours

Calcul matriciel

Opérations, anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, pivot de Gauss, systèmes linéaires

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

Dans toute la fiche, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n, p, q des entiers naturels non nuls. *Tout ce chapitre est purement calculatoire : ni espace vectoriel, ni application linéaire, ni déterminant.*

1 MATRICES : ENSEMBLE, SOMME, PRODUIT PAR UN SCALAIRE

Définition. Une **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, représentée par un tableau. L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ (matrices **carrées** d'ordre n). Le scalaire $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j : la **ligne d'abord**. Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont même format et mêmes coefficients.

Notation. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des **colonnes**, $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ celui des **lignes**; $0_{n,p}$ (ou 0) est la matrice nulle.

Définition. Pour $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$ et $\lambda A = (\lambda a_{i,j})$: on ajoute **coefficient par coefficient**, et **seules deux matrices de même format** peuvent être ajoutées. Alors $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif de neutre $0_{n,p}$, l'opposé de A étant $-A = (-1)A$, et $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$, $1A = A$.

Définition. Les **matrices élémentaires** $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ($i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$) sont définies par : le coefficient de $E_{i,j}$ en position (k, ℓ) vaut $\delta_{i,k} \delta_{j,\ell}$, où δ est le **symbole de Kronecker** ($\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$, 0 sinon). Autrement dit $E_{i,j}$ n'a qu'un coefficient non nul, égal à 1 , en position (i, j) .

Propriété. Toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} E_{i,j}$: les matrices élémentaires engendrent $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

2 PRODUIT MATRICIEL

Définition. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{j,k}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le **produit** AB est la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ de coefficients

$$(AB)_{i,k} = \sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{j,k} \quad (i \in \llbracket 1; n \rrbracket, k \in \llbracket 1; q \rrbracket).$$

Le produit AB n'est défini que si le **nombre de colonnes de A** est égal au **nombre de lignes de B** .

Propriété — règles de calcul. Pour des matrices de formats compatibles et $\lambda \in \mathbb{K}$: **bilinéarité** $A(B+C) = AB+AC$, $(A+B)C = AC+BC$, $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$; **associativité** $(AB)C = A(BC)$; $I_n A = A I_p = A$ pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, où $I_n = (\delta_{i,i})$ est la **matrice identité**; enfin $E_{i,j} E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$: le produit de deux matrices élémentaires est nul ou élémentaire.

Idée de preuve (exigible). Pour l'associativité on calcule les deux coefficients généraux : $((AB)C)_{i,\ell} = \sum_k (\sum_j a_{i,j} b_{j,k}) c_{k,\ell} = \sum_j \sum_k a_{i,j} b_{j,k} c_{k,\ell}$, et $(A(BC))_{i,\ell}$ donne la même somme double (intersion licite : sommes finies).

Propriété — lecture en colonnes et en lignes. Notons $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour $X = {}^t(x_1 \cdots x_p) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$,

$$AX = \sum_{j=1}^p x_j C_j$$

AX est la **combinaison linéaire des colonnes de A dont les coefficients sont ceux de X** . Plus généralement la k -ième colonne de AB est $A \times (k$ -ième colonne de B), et la i -ième ligne de AB est $(i$ -ième ligne de A) $\times B$.

✗ ATTENTION — le produit n'est pas commutatif

Dès $n \geq 2$: avec $A = E_{1,2}$ et $B = E_{2,1}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $AB = E_{1,1}$ et $BA = E_{2,2}$. Sont donc **faux** en général $AB = BA$, $(AB)^k = A^k B^k$ et $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (la formule correcte est $A^2 + AB + BA + B^2$); de plus $AB = AC$ n'entraîne pas $B = C$, ni $AB = 0$ que $A = 0$ ou $B = 0$.

3 TRANSPOSITION

Définition. La **transposée** de $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, de coefficients $({}^tA)_{i,j} = a_{j,i}$: on échange lignes et colonnes (on écrit aussi A^t). Pour A, B de formats compatibles et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB, \quad {}^t({}^tA) = A, \quad \boxed{{}^t(AB) = {}^tB {}^tA} \quad (\text{l'ordre s'inverse}).$$

Idée de preuve (exigible). $({}^t(AB))_{i,k} = (AB)_{k,i} = \sum_j a_{k,j} b_{j,i} = \sum_j ({}^tB)_{i,j} ({}^tA)_{j,k} = ({}^tB {}^tA)_{i,k}$.

4 MATRICES CARRÉES PARTICULIÈRES

Définition. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Elle est **diagonale** si $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ (notation $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$), **scalaire** si $A = \lambda I_n$ pour un $\lambda \in \mathbb{K}$, **triangulaire supérieure** si $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$ et **triangulaire inférieure** si $a_{i,j} = 0$ pour $i < j$, **symétrique** si ${}^tA = A$ et **antisymétrique** si ${}^tA = -A$ (ensembles notés $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, ou $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$), enfin **nilpotente** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

Propriété. Une matrice antisymétrique a tous ses coefficients diagonaux nuls (car $a_{i,i} = -a_{i,i}$), et toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique $A = S + N$ avec $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$: nécessairement $S = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$ et $N = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$.

Propriété — stabilité. La somme et le produit de deux matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. inférieures) sont de même nature. De plus

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \text{diag}(\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_n), \quad \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k),$$

et si A, B sont triangulaires supérieures, les coefficients diagonaux de AB sont les produits $a_{i,i} b_{i,i}$. Les matrices diagonales commutent entre elles, pas les matrices triangulaires.

5 L'ANNEAU $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ET LE GROUPE $\text{GL}_n(\mathbb{K})$

Théorème. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, d'unité I_n . Il est **commutatif si et seulement si** $n = 1$. Pour $n \geq 2$, il n'est **pas intègre** : il possède des diviseurs de zéro (par exemple $E_{1,1} E_{2,2} = 0$) et des éléments nilpotents non nuls (par exemple $E_{1,2}$, dont le carré est nul).

Les matrices scalaires commutent avec toutes les matrices : $(\lambda I_n)A = A(\lambda I_n) = \lambda A$.

Définition. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. Une telle B est alors unique, notée A^{-1} . L'ensemble des matrices inversibles est le **groupe linéaire** $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Théorème. $(\text{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe (sous-groupe du groupe des inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), et pour $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^{-1})^{-1} = A, \quad (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \boxed{{}^tA \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ et } ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})}$$

Idée de preuve. Pour la dernière : transposer $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ donne ${}^t(A^{-1}) {}^tA = {}^tA {}^t(A^{-1}) = I_n$.

Propriété — cas $n = 2$. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $A \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} A = (ad - bc)I_2$. Donc si $ad - bc \neq 0$, A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix};$$

si $ad - bc = 0$, A n'est pas inversible (voir la méthode ci-dessous, ou exhiber $X \neq 0$ avec $AX = 0$).

Théorème — matrices triangulaires. Une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est inversible **si et seulement si** tous ses coefficients diagonaux sont non nuls; son inverse est alors triangulaire de même type, de coefficients diagonaux les $1/a_{i,i}$. En particulier $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est inversible si et seulement si tous les λ_i sont non nuls, et son inverse est $\text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$.

✖ ATTENTION

Une matrice non carrée n'est jamais « inversible » (la notion n'est pas définie). Et « A n'est pas inversible » ne veut pas dire « $A = 0$ » : $E_{1,1}$ n'est ni nulle ni inversible. Enfin on n'écrit jamais $\frac{B}{A}$: on écrit $A^{-1}B$ ou BA^{-1} , qui diffèrent en général.

6 PUISSANCES ET FORMULE DU BINÔME

Définition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $A^0 = I_n$ et $A^{k+1} = A^k A$. Si A est inversible, $A^{-k} = (A^{-1})^k$.

Théorème — binôme et factorisation. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\boxed{AB = BA}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(A + B)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^j B^{k-j}, \quad A^k - B^k = (A - B) \sum_{j=0}^{k-1} A^j B^{k-1-j} \quad (k \geq 1).$$

Idée de preuve (exigible). C'est le calcul dans un anneau pour deux éléments qui commutent (chapitre 12) : récurrence sur k utilisant la relation de Pascal, la commutation servant à écrire $BA^j = A^j B$. Sans l'hypothèse $AB = BA$, la formule est fausse.

Méthode — calculer A^k . trois stratégies, par ordre de préférence. (i) A diagonale : élever les coefficients diagonaux à la puissance k . (ii) $A = \lambda I_n + N$ avec N nilpotente : λI_n et N commutent, le binôme s'applique et la somme est finie, puisque $N^j = 0$ dès que $j \geq r$ (où $N^r = 0$). (iii) A vérifie une relation $A^2 = \alpha A + \beta I_n$: chercher A^k sous la forme $u_k A + v_k I_n$, les suites (u_k) et (v_k) vérifiant une récurrence linéaire d'ordre 2 (chapitre 8).

Remarque. Une relation $A^2 = \alpha A + \beta I_n$ avec $\beta \neq 0$ donne aussi l'inverse : $A(\frac{1}{\beta}(A - \alpha I_n)) = I_n$, donc $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = \frac{1}{\beta}(A - \alpha I_n)$.

7 OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Définition. Les **opérations élémentaires sur les lignes** d'une matrice sont :

$$(\text{échange}) L_i \leftrightarrow L_j \quad (i \neq j), \quad (\text{dilatation}) L_i \leftarrow \lambda L_i \quad (\lambda \neq 0), \quad (\text{transvection}) L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \quad (i \neq j, \lambda \in \mathbb{K}).$$

On définit de même les opérations sur les colonnes : $C_i \leftrightarrow C_j$, $C_i \leftarrow \lambda C_i$, $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$.

Théorème — interprétation matricielle. Posons, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}, \quad D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}, \quad T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}.$$

Effectuer sur $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ (resp. $L_i \leftarrow \lambda L_i$, resp. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$) revient à remplacer A par $P_{i,j}A$ (resp. $D_i(\lambda)A$, resp. $T_{i,j}(\lambda)A$) : **une opération sur les lignes est une multiplication à gauche**. Les opérations sur les colonnes correspondent à une multiplication à droite par les matrices analogues de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Propriété. Ces trois matrices sont inversibles : $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$, $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$, $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$. **Conséquence :** une opération élémentaire ne change ni l'inversibilité d'une matrice carrée, ni l'ensemble des solutions du système $AX = B$ lorsqu'on l'applique simultanément à A et à B (car $MAX = MB \iff AX = B$ pour M inversible).

8 ÉCHELONNEMENT, PIVOT DE GAUSS, RANG

Définition. Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est **échelonnée en lignes** si ses lignes nulles sont situées sous ses lignes non nulles et si, pour deux lignes non nulles consécutives, l'indice de colonne du premier coefficient non nul — appelé **pivot** — de la ligne du bas est strictement plus grand que celui de la ligne du haut. Elle est **échelonnée réduite** si de plus chaque pivot vaut 1 et est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Théorème — algorithme du pivot de Gauss. Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut être transformée, par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes, en une matrice échelonnée réduite. *Principe :* on cherche dans la première colonne non nulle un coefficient non nul, on l'amène en haut par un échange, on le normalise, on annule tous les autres coefficients de sa colonne par des transvections, puis on recommence avec les lignes et colonnes suivantes.

Définition. Le **rang** de A , noté $\text{rg } A$, est le nombre de pivots d'une matrice échelonnée obtenue à partir de A par opérations sur les lignes. On admet que ce nombre ne dépend pas des opérations choisies (ce point sera démontré au chapitre 18). On a toujours $0 \leq \text{rg } A \leq \min(n, p)$, et $\text{rg } A = 0 \iff A = 0$.

Théorème — inversibilité et rang. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \text{rg } A = n \iff \text{la forme échelonnée réduite de } A \text{ est } I_n \iff (AX = 0 \Rightarrow X = 0).$$

Idée de preuve (exigible). Si la forme échelonnée réduite est I_n , il existe M inversible (produit de matrices élémentaires) telle que $MA = I_n$; alors $A = M^{-1}$ est inversible. Réciproquement, si $\text{rg } A < n$, la forme échelonnée a une ligne nulle, donc $AX = 0$ a strictement moins de n inconnues principales et admet une solution $X \neq 0$; or $AX = 0$ et A inversible donneraient $X = A^{-1}0 = 0$.

Méthode — calcul de A^{-1} par le pivot. écrire côte à côte $(A \mid I_n)$ et appliquer aux deux blocs simultanément les opérations sur les lignes qui réduisent A . Si l'on aboutit à $(I_n \mid B)$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$; si une ligne de la partie gauche devient nulle, A n'est pas inversible. *Justification :* chaque étape multiplie à gauche par une matrice inversible, donc à la fin $MA = I_n$ et $MI_n = B$ avec M inversible : $M = B$ et $B = A^{-1}$. *Contrôle obligatoire :* vérifier $AB = I_n$.

9 SYSTÈMES LINÉAIRES

Notation. Un **système linéaire** de n équations à p inconnues $x_1, \dots, x_p$ s'écrit matriciellement

$$(S) : AX = B, \quad A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ (matrice du système)}, \quad X = {}^t(x_1 \cdots x_p), \quad B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Le système **homogène associé** est $(S_0) : AX = 0$. On dit que (S) est **compatible** s'il admet au moins une solution.

Théorème — compatibilité. (S) est compatible si et seulement si B est combinaison linéaire des colonnes de A (car $AX = \sum_j x_j C_j$).

Théorème — structure de l'ensemble des solutions. Si X_0 est une solution de (S) , l'ensemble des solutions de (S) est

$$S = \{X_0 + Y, Y \text{ solution de } (S_0)\}$$

Idée de preuve (exigible). Si $AX_0 = B$ et $AY = 0$ alors $A(X_0 + Y) = B$; réciproquement si $AX = B$ alors $A(X - X_0) = B - B = 0$, donc $Y = X - X_0$ est solution de (S_0) et $X = X_0 + Y$.

Méthode — résolution par le pivot. échelonner $(A \mid B)$ par opérations sur les *lignes*, puis lire la forme échelonnée. Une ligne $(0 \cdots 0 \mid \beta)$ avec $\beta \neq 0$ signifie $0 = \beta$: le système est **incompatible** et $S = \emptyset$. Sinon il est compatible : les inconnues associées aux colonnes de pivot sont **principales** (il y en a $r = \text{rg } A$), les $p - r$ autres sont **secondaires** et se choisissent librement (ce sont les *paramètres*). Si $r = p$ la solution est unique; si $r < p$ il y en a une infinité.

Définition. Un **système de Cramer** est un système $AX = B$ dont la matrice A est *carrée et inversible*. Il admet alors une **unique** solution, $X = A^{-1}B$, et ceci pour tout second membre B .

► SAVOIR-FAIRE

- Calculer un produit, une transposée, une puissance; reconnaître que deux matrices ne commutent pas; décomposer une matrice carrée en partie symétrique et partie antisymétrique.
- Calculer A^k par le binôme ($A = \lambda I_n + N$ nilpotente) ou par une relation $A^2 = \alpha A + \beta I_n$.
- Montrer qu'une matrice est inversible et calculer son inverse (par le pivot, par une relation polynomiale, ou en résolvant $AY = X$); échelonner une matrice et en déterminer le rang, éventuellement en fonction d'un paramètre.
- Résoudre un système linéaire par le pivot, discuter sa compatibilité, décrire S sous la forme $X_0 + Y$.

★ EXEMPLE — deux calculs types

- **Puissance par le binôme.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = E_{1,3}$, $N^3 = 0$. Comme I_3 et

$$N \text{ commutent, } A^k = I_3 + kN + \binom{k}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ car } k + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

- **Rang et système.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) : \text{deux}$
pivots, donc $\text{rg } A = 2$ et A n'est pas inversible; le système est compatible, z est secondaire, $y = 1 - z$, $x = -1 + z$, et $S = \{{}^t(-1 \ 1 \ 0) + z {}^t(1 \ -1 \ 1), z \in \mathbb{K}\}$.

✖ PIÈGES

- Écrire $AB = BA$, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $(AB)^k = A^k B^k$, ou appliquer le binôme sans avoir vérifié $AB = BA$.
- Simplifier $AB = AC$ en $B = C$, ou conclure de $A^2 = 0$ que $A = 0$, ou de $AB = 0$ que $A = 0$ ou $B = 0$.
- Multiplier deux matrices de formats incompatibles; parler de l'inverse d'une matrice non carrée; écrire $\frac{B}{A}$; multiplier une équation matricielle à gauche d'un côté et à droite de l'autre.
- Mélanger opérations sur les lignes et sur les colonnes dans un calcul d'inverse ou dans la résolution d'un système; oublier $\lambda \neq 0$ dans $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- Oublier la ligne $(0 \cdots 0 \mid \beta \neq 0)$: un système échelonné peut être *incompatible*; à l'inverse, annoncer « une infinité de solutions » sans avoir vérifié la compatibilité.