

PREMIÈRE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 6



R. RINGUET · 2026 – 2027

Sujet type épreuve anticipée

Variations et extremums

Partie 1 : douze questions d'automatismes — Partie 2 : étude d'une fonction rationnelle, les adhérents d'un club, la vitesse la plus économique

Durée : 2 h · sans calculatrice · QCM et 3 exercices · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

L'usage de la calculatrice est interdit. Le sujet comporte deux parties indépendantes. **Partie 1** : pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte ; indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie, sans justification. Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. **Partie 2** : les réponses doivent être justifiées ; la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent dans l'appréciation des copies.

Partie 1 — Automatismes (6 points)

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

6 pts ●○○○

- 1.1** Le nombre $\frac{3}{5} \div \frac{9}{10}$ est égal à :
- a) $\frac{27}{50}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{6}{5}$
- 1.2** Le nombre $\frac{10^3 \times 10^{-5}}{10^{-4}}$ est égal à :
- a) 10^{-6} b) 10^{-2} c) 10^{12} d) 10^2
- 1.3** Le nombre $\sqrt{12} \times \sqrt{3}$ est égal à :
- a) $\sqrt{15}$ b) 36 c) $3\sqrt{2}$ d) 6
- 1.4** Pour tout réel x , l'expression $9x^2 - 25$ est égale à :
- a) $(3x - 5)^2$ b) $(3x - 5)(3x + 5)$ c) $(9x - 5)(x + 5)$ d) $(3x + 5)^2$
- 1.5** L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $-2(x - 1)(x - 4) < 0$ est :
- a) $]1; 4[$ b) $] -\infty; -4[\cup] -1; +\infty[$
 c) $] -\infty; 1[\cup] 4; +\infty[$ d) $[1; 4]$
- 1.6** Le prix d'un abonnement augmente de 10 %, puis de 20 %. Sur l'ensemble des deux hausses, le prix a augmenté de :
- a) 30 % b) 31 % c) 32 % d) 40 %
- 1.7** Une série statistique a pour moyenne 12. On ajoute 2 à chacune de ses valeurs. La moyenne de la nouvelle série est :
- a) 14 b) 12 c) 24 d) 13
- 1.8** On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Sachant que le résultat est pair, la probabilité qu'il soit un nombre premier est :

- a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{3}$

1.9 Dans un repère, la droite d'équation $3x - 2y + 4 = 0$ a pour coefficient directeur :

- a) $\frac{3}{2}$ b) 3 c) $-\frac{3}{2}$ d) 2

1.10 Une fonction f définie sur $[-2; 6]$ a le tableau de variations ci-contre; sa courbe se trace sans lever le crayon. Le nombre de solutions dans $[-2; 6]$ de l'équation $f(x) = 3$ est :

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

x	-2	1	4	6
$f(x)$	4		2	-1

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 -3

1.11 Une fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x , $g'(x) = (x-2)(x+3)$. La fonction g est décroissante sur :

- a) $]-\infty; -3]$ b) $[-3; 2]$ c) $[2; +\infty[$ d) $\mathbb{R}$

1.12 Parmi les fonctions suivantes, laquelle est impaire ?

- a) $x \mapsto x^2 + x$ b) $x \mapsto x^3 + 1$ c) $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ d) $x \mapsto |x|$

Partie 2 — Exercices (14 points)

Exercice 2 Étude d'une fonction rationnelle

5 pts ●●○

On considère la fonction f définie sur $[0; 5]$ par

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et D la droite d'équation $y = x - 1$, tracées ci-contre.

2.1 Calculer $f(0)$ et $f(5)$.

2.2 Démontrer que, pour tout $x \in [0; 5]$,

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

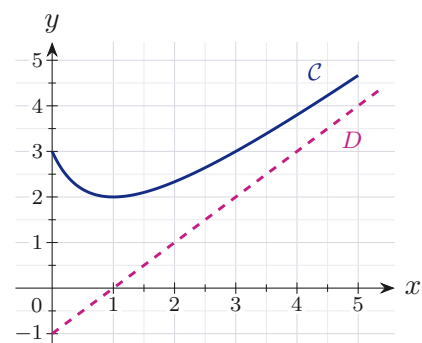


Figure 1 — La courbe $\mathcal{C}$ et la droite D

2.3 Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 5]$. Préciser le minimum de f et la valeur où il est atteint. Que peut-on dire de la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point ?

2.4 Justifier, à l'aide du tableau de variations, que l'équation $f(x) = \frac{5}{2}$ admet exactement deux solutions dans $[0; 5]$. Montrer que cette équation équivaut à $2x^2 - 5x + 1 = 0$, puis la résoudre. Vérifier la cohérence avec le résultat précédent.

2.5 Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de la droite D sur $[0; 5]$.

Exercice 3 Les adhérents d'un club

4 pts ●●○

Un club d'escalade compte 800 adhérents en 2026. On estime que, chaque année, 10 % des adhérents ne renouvellent pas leur adhésion et que 100 nouvelles personnes adhèrent. On note u_n le nombre d'adhérents en l'année $2026 + n$; ainsi $u_0 = 800$.

3.1 Calculer u_1 et u_2 . Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9 u_n + 100$.

3.2 On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 1\,000$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique; préciser sa raison et son premier terme. En déduire que $u_n = 1\,000 - 200 \times 0,9^n$.

3.3 Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) . Le club peut-il dépasser 1 000 adhérents selon ce modèle ?

- 3.4 Recopier et compléter la fonction Python ci-contre pour qu'elle renvoie la première année où le nombre d'adhérents dépasse 950. On donne $0,9^{13} \approx 0,254$ et $0,9^{14} \approx 0,229$: quelle année la fonction renvoie-t-elle ?

```

1 def annee():
2     n = 0
3     u = 800
4     while .....:
5         n = n + 1
6         u = .....
7     return 2026 + n

```

Exercice 4 La vitesse la plus économique

5 pts ●●○

Un transporteur doit effectuer en camionnette une livraison à 300 km de son entrepôt, sur autoroute, à une vitesse constante v , en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, comprise entre 50 et 110. On modélise ainsi le coût de ce trajet :

- le carburant et l'usure de la camionnette coûtent $0,2 + 0,005v$ euros par kilomètre parcouru ;
- le chauffeur est payé 32 euros par heure de conduite.

La courbe du coût total C du trajet, en euros, en fonction de v , est tracée ci-contre.

- 4.1 Calculer la durée du trajet, puis son coût total, lorsque la camionnette roule à $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.
- 4.2 Montrer que, pour $v \in [50 ; 110]$,

$$C(v) = 60 + 1,5v + \frac{9600}{v}.$$

- 4.3 Montrer que $C'(v) = \frac{1,5(v - 80)(v + 80)}{v^2}$, puis dresser le tableau de variations de C sur $[50 ; 110]$ (on ne demande pas $C(110)$).
- 4.4 Quelle vitesse le transporteur doit-il choisir pour que le coût du trajet soit minimal ? Donner ce coût minimal et la durée du trajet correspondante, en heures et minutes. Contrôler sur la figure 2.
- 4.5 Le client souhaite être livré au plus vite et propose de rouler à $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Calculer le surcoût par rapport au trajet le plus économique et le temps gagné.
- 4.6 Pour une livraison de nuit, le chauffeur est payé 50 euros de l'heure. Déterminer la nouvelle vitesse la plus économique et le coût minimal correspondant. Interpréter.
- 4.7 On revient au salaire de 32 euros de l'heure. Lire sur la figure 2 les vitesses pour lesquelles le coût du trajet ne dépasse pas 310 euros. Montrer que, pour $v \in [50 ; 110]$, l'inéquation $C(v) \leq 310$ équivaut à $3v^2 - 500v + 19200 \leq 0$, puis la résoudre.

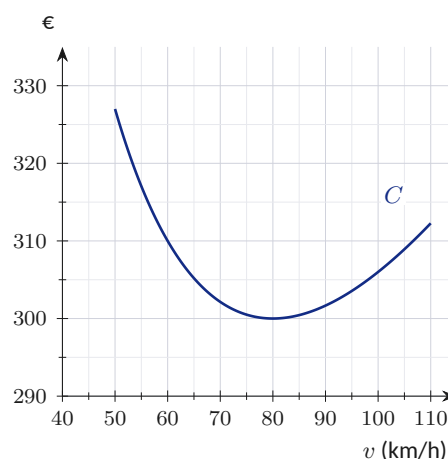


Figure 2 — Coût du trajet selon la vitesse