

Fiche de cours Variations et extremums

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 SIGNE DE LA DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

Théorème — admis. Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I .

■ FORMULAIRE

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **croissante** sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **décroissante** sur I .
- Si $f'(x) > 0$ sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est **strictement croissante** sur I (de même pour la décroissance stricte).
- Réciproquement, si f est croissante (resp. décroissante) sur I , alors $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in I$.
- f est **constante** sur I si, et seulement si, $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Remarque. Le mot **intervalle** est essentiel : $x \mapsto \frac{1}{x}$ a une dérivée négative sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty [$, mais elle n'est pas décroissante sur la réunion de ces deux intervalles.

2 EXTREMUMS

Définition. f admet un **maximum local** en a s'il existe un intervalle ouvert contenant a sur lequel $f(x) \leq f(a)$; on définit de même un **minimum local**. Un extremum est **global** sur I si l'inégalité vaut pour tout x de I .

Théorème. Si f , dérivable sur I , admet un extremum local en un réel a **intérieur** à I (pas en une borne), alors $f'(a) = 0$: la tangente en ce point est **horizontale**.

Propriété — réciproque partielle. Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors $f(a)$ est un extremum local. Si f' s'annule **sans** changer de signe, il n'y a pas d'extremum : pour $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3 ÉTUDIER UNE FONCTION ET DRESSER SON TABLEAU DE VARIATIONS

Méthode — les quatre étapes. 1. préciser l'intervalle d'étude; 2. calculer $f'(x)$ et la **factoriser**; 3. étudier le signe de $f'(x)$ (signe d'un produit, d'un trinôme); 4. dresser le tableau de variations en indiquant les valeurs de f aux bornes et aux extremums.

Remarque. Un tableau de variations permet ensuite de comparer des images, de déterminer le nombre de solutions d'une équation $f(x) = k$, ou de justifier une inégalité. On admet que la courbe d'une fonction dérivable se trace « sans lever le crayon » : sur un intervalle où f est strictement monotone, elle prend une fois et une seule chaque valeur comprise entre ses valeurs aux bornes.

x	-3	-1	3	5		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	-22	↗ 10		↘ -22		↗ 10

Figure 1 — Tableau de variations de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ sur $[-3; 5]$, avec $f'(x) = 3(x+1)(x-3)$.

4 OPTIMISATION, INÉGALITÉS ET POSITION RELATIVE DE DEUX COURBES

Méthode — problème d'optimisation. choisir la variable et l'**intervalle** où elle varie, exprimer la grandeur à optimiser (aire, volume, coût, bénéfice) en fonction de cette variable, dériver, dresser le tableau de variations et conclure en revenant à la question posée.

Méthode — inégalité ou position relative. pour comparer f et g sur I , étudier la fonction **différence** $d = f - g$: là où $d(x) > 0$, la courbe de f est **au-dessus** de celle de g ; là où $d(x) < 0$, elle est en dessous; $d(x) = 0$ donne les points d'intersection.

Remarque. Pour un trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, la dérivée $f'(x) = 2ax + b$ s'annule en $-\frac{b}{2a}$ en changeant de signe : on retrouve le sommet de la parabole et l'extremum vus au chapitre 1. En algorithmique, la **méthode de Newton** approche une solution de $f(x) = 0$ en remplaçant, à chaque étape, la courbe par sa tangente.

5 FONCTIONS PAIRES ET FONCTIONS IMPAIRES

Définition. Soit f définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ **symétrique par rapport à 0** (si $x \in \mathcal{D}$, alors $-x \in \mathcal{D}$).

- f est **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$: sa courbe est symétrique par rapport à l'**axe des ordonnées**.
- f est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$: sa courbe est symétrique par rapport à l'**origine** du repère.

Méthode — montrer une parité. vérifier d'abord que $\mathcal{D}$ est symétrique, puis calculer $f(-x)$ et le comparer à $f(x)$ et à $-f(x)$. Pour prouver que f n'est pas paire (ou pas impaire), un contre-exemple suffit : un réel a tel que $f(-a) \neq f(a)$ (ou $f(-a) \neq -f(a)$); souvent, le même réel règle les deux cas.

6 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Déduire le sens de variation d'une fonction du signe de sa dérivée et dresser un tableau de variations complet.
- Déterminer les extremums locaux et globaux d'une fonction sur un intervalle.
- Exploiter un tableau de variations : comparer des images, encadrer f , dénombrer les solutions de $f(x) = k$.
- Résoudre un problème d'optimisation (aire, volume, coût, bénéfice) en revenant au contexte.
- Établir une inégalité ou étudier la position relative de deux courbes par la fonction différence.
- Reconnaître et démontrer qu'une fonction est paire ou impaire, et en déduire une symétrie de sa courbe.

7 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — étude complète

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ sur $[-3; 5]$. Alors $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$, positive à l'extérieur des racines. D'où le tableau de la figure 1 : f admet un maximum local $f(-1) = 10$, un minimum local $f(3) = -22$; sur $[-3; 5]$, son maximum est 10 et son minimum -22 .

★ EXEMPLE — optimisation

Dans un carré de carton de 12 cm de côté, on découpe aux quatre coins des carrés de côté x , puis on relève les bords : le volume de la boîte obtenue est $V(x) = x(12 - 2x)^2$ pour $x \in]0; 6[$. En développant, $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$, donc $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x-2)(x-6)$; comme $x-6 < 0$ sur $]0; 6[$, $V'(x)$ est du signe de $2-x$: V croît sur $]0; 2]$ puis décroît sur $[2; 6[$. Le volume est maximal pour $x = 2$ et vaut $V(2) = 2 \times 8^2 = 128 \text{ cm}^3$.

★ EXEMPLE — inégalité

Montrons que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ pour tout $x > 0$. Posons $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, du signe de $x^2 - 1$. Donc f décroît sur $]0; 1]$ et croît sur $[1; +\infty[$: son minimum est $f(1) = 2$, d'où l'inégalité.

★ EXEMPLE — parité

$f(x) = x^4 - 3x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$: f est **paire**. $g(x) = x^3 - 5x$ vérifie $g(-x) = -x^3 + 5x = -g(x)$: g est **impaire**. $h(x) = x^2 + x$ n'est ni l'un ni l'autre, car $h(-1) = 0$ alors que $h(1) = 2$.

✗ PIÈGES

- Le théorème ne s'applique que sur un **intervalle** : ne jamais écrire « décroissante sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ ».
- $f'(a) = 0$ n'assure pas un extremum : il faut que f' **change de signe** en a ($x \mapsto x^3$ en 0).
- Ne pas confondre le signe de f' et celui de f : une fonction croissante peut être négative.
- Un extremum atteint à une **borne** de l'intervalle n'annule pas forcément la dérivée.
- Dans un problème d'optimisation, ne pas oublier l'intervalle de variation et la réponse en langue française (dimensions, prix...).
- Pour la parité, vérifier d'abord la symétrie de l'ensemble de définition : $\sqrt{x}$ n'est ni paire ni impaire, faute de domaine symétrique.