

Exercices 1 Variations et extremums

Les bases : signe de la dérivée et variations, tableaux de variations, extremums, parité

7 exercices · niveau ●○○ · durée conseillée : 1 h 30 · sans calculatrice

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Dédire le sens de variation d'une fonction du signe de sa dérivée, et dresser un tableau de variations complet.
- Déterminer les extremums d'une fonction ; savoir qu'une dérivée nulle ne suffit pas.
- Lire un tableau de variations (extremums, comparaisons, nombre de solutions d'une équation).
- Reconnaître une fonction paire ou impaire, par le calcul et sur sa courbe.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I (théorème admis).

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, f est croissante sur I ; si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, f est décroissante sur I ; si $f'(x) > 0$ sur I sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, f est strictement croissante sur I . Réciproquement, si f est croissante (resp. décroissante) sur I , alors $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in I$.
- f est constante sur I si, et seulement si, $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.
- Si f admet un extremum local en un réel a intérieur à I (pas une borne), alors $f'(a) = 0$: la tangente en a est horizontale. **La réciproque est fautive.** Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors $f(a)$ est un extremum local.
- $\mathcal{D}$ symétrique par rapport à 0 : f est *paire* si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$ (courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées) ; f est *impaire* si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$ (courbe symétrique par rapport à l'origine).

Exercice 1 Du signe de la dérivée au sens de variation

●○○

Dans chaque cas, f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et on donne l'expression de $f'(x)$. Étudier le signe de $f'(x)$, puis donner le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ (sans chercher f).

- a) $3(x-4)$ b) $-2(x+1)(x-3)$ c) $(x-1)^2$ d) x^2+1

Exercice 2 Lire un tableau de variations

●○○

Une fonction f dérivable sur $[-4; 5]$ a le tableau de variations ci-contre. On admet que sa courbe se trace « sans lever le crayon ».

x	-4	-1	2	5
$f(x)$	2	-3	4	0

- 2.1 Dresser le tableau de signes de $f'(x)$. Que vaut $f'(2)$?
- 2.2 Donner le maximum et le minimum de f sur $[-4; 5]$, et les valeurs où ils sont atteints.
- 2.3 Comparer, si possible, $f(0)$ et $f(1)$, puis $f(-3)$ et $f(3)$.
- 2.4 Combien l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle de solutions dans $[-4; 5]$? Même question pour $f(x) = 3$, puis pour $f(x) = -4$.

Exercice 3 Une fonction polynôme de degré 3

●○○

Soit f la fonction définie sur $[-3; 5]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

- 3.1** Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = 3(x+1)(x-3)$.
- 3.2** Dresser le tableau de variations complet de f sur $[-3; 5]$ (valeurs aux bornes et aux extremums).
- 3.3** Préciser les extremums locaux de f , puis son maximum et son minimum sur $[-3; 5]$.
- 3.4** Combien l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle de solutions dans $[-3; 5]$?

Exercice 4 Paire, impaire, ou ni l'un ni l'autre ?

●○○

Pour chaque fonction, préciser son ensemble de définition, puis dire si elle est paire, impaire, ou ni paire ni impaire. Justifier.

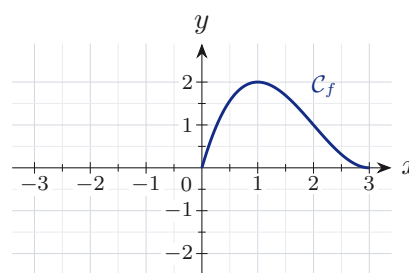
- a) $f_1(x) = x^4 - 3x^2$ b) $f_2(x) = x^3 - 5x$ c) $f_3(x) = x^2 + x$ d) $f_4(x) = \frac{2}{x}$
- e) $f_5(x) = |x| + 1$ f) $f_6(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ g) $f_7(x) = \sqrt{x}$ h) $f_8(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

Exercice 5 Compléter une courbe par symétrie

●○○

La figure 1 représente une fonction f définie sur $[-3; 3]$, mais seulement pour $x \in [0; 3]$.

- 5.1** On suppose que f est paire. Reproduire la figure et compléter la courbe sur $[-3; 0]$. Que valent $f(-1)$ et $f(-2)$? Dresser le tableau de variations de f sur $[-3; 3]$.
- 5.2** Même question en supposant que f est impaire.

Figure 1 — La courbe de f sur $[0; 3]$ **Exercice 6 Dérivée nulle, extremum, fonction constante**

●●○

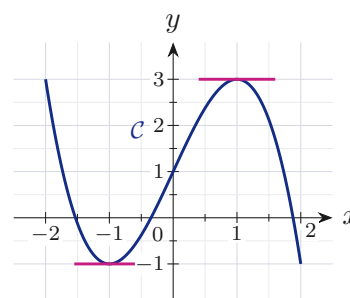
- 6.1** Soit $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(0)$. La fonction f admet-elle un extremum en 0 ? Justifier à l'aide du signe de $f'(x)$. Quelle propriété du cours cet exemple illustre-t-il ?
- 6.2** Soit $g(x) = x^4$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(0)$ et étudier le signe de $g'(x)$. La fonction g admet-elle un extremum en 0 ?
- 6.3** Soit $h(x) = (x+3)^2 - (x-3)^2 - 12x$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $h'(x)$. Que peut-on en déduire pour h ? Calculer $h(0)$ et conclure.

Exercice 7 Lire le signe de la dérivée sur une courbe

●●○

La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre représente une fonction f dérivable sur $[-2; 2]$; ses tangentes aux points d'abscisses -1 et 1 sont horizontales.

- 7.1** Dresser le tableau de variations de f , puis le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[-2; 2]$. Donner $f'(-1)$ et $f'(1)$. Le nombre $f'(0)$ est-il positif ou négatif ?
- 7.2** Déterminer graphiquement le nombre de solutions des équations $f(x) = 2$, $f(x) = 3$ et $f(x) = -2$.
- 7.3** On admet que $f(x) = -x^3 + 3x + 1$. Retrouver par le calcul les résultats de la question 7.1.

Figure 2 — La courbe $\mathcal{C}$