

PREMIÈRE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 6

Contrôle B Variations et extremums



R. RINGUET · 2026 – 2027

Vrai ou faux, associer les courbes de f et de f' , le point d'une route le plus proche, un aquarium économique

Durée : 1 h · sans calculatrice · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

La calculatrice n'est pas autorisée. Tout résultat doit être justifié ; dans l'exercice 1, une réponse « vrai » ou « faux » non justifiée ne rapporte aucun point (un contre-exemple suffit pour justifier qu'une affirmation est fausse). Les résultats sont donnés sous forme exacte. La qualité de la rédaction et la rigueur des raisonnements sont prises en compte dans la notation.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

5 pts ●●●○

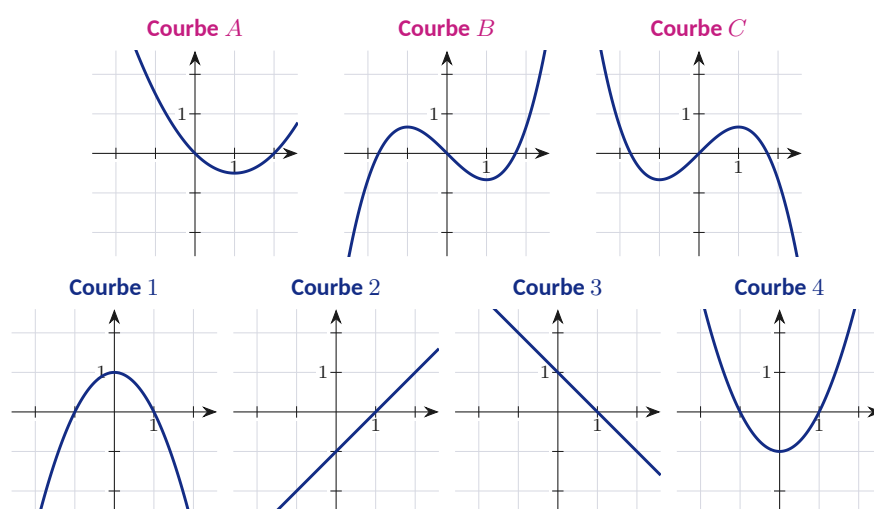
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse.

- 1.1** Si une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f'(2) = 0$, alors f admet un extremum local en 2.
- 1.2** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$ est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 1.3** Si f est dérivable sur $]0; 1[\cup]2; 3[$ et si $f'(x) = 0$ pour tout x de cet ensemble, alors f est constante sur cet ensemble.
- 1.4** Pour tout réel $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
- 1.5** La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ admet un extremum local.

Exercice 2 Associer les courbes de f et de f'

4 pts ●●●○

Les courbes A , B et C ci-dessous représentent, sur $[-2,6; 2,6]$, trois fonctions f_A , f_B et f_C dérivables sur $\mathbb{R}$. Parmi les courbes 1, 2, 3 et 4, trois représentent les fonctions dérivées f'_A , f'_B et f'_C ; la quatrième ne sert pas. Toutes les graduations sont unitaires.



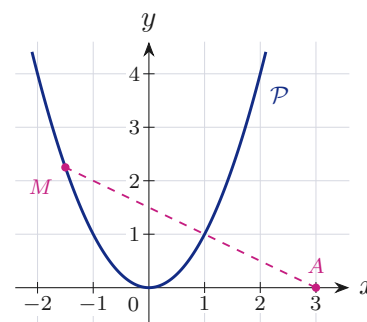
- 2.1** Associer à chacune des fonctions f_A , f_B et f_C la courbe de sa fonction dérivée, en justifiant chaque choix par un argument précis (sens de variation, valeurs où la dérivée s'annule, signe).

- 2.2** Dresser le tableau de variations d'une fonction h dont la dérivée est représentée par la courbe restante, puis proposer une expression de $h(x)$.
- 2.3** On admet que $f_B(x) = \frac{x^3}{3} - x$. Démontrer que f_B est impaire, puis que sa dérivée f'_B est paire. Quelles symétries des courbes correspondantes retrouve-t-on sur les figures ?

Exercice 3 Le point d'une route le plus proche

5 pts ●●○

Dans un repère orthonormé d'unité 1 km, une route suit la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$. Une randonneuse, au point $A(3; 0)$, veut rejoindre la route en ligne droite par le plus court chemin. Pour tout réel x , on note M le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse x .

Figure 1 — Un point M quelconque de $\mathcal{P}$

- 3.1** Montrer que $AM^2 = g(x)$, où $g(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9$.
- 3.2** Montrer que $g'(x) = 2(x - 1)(2x^2 + 2x + 3)$, puis étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
- 3.3** Expliquer pourquoi AM est minimale lorsque AM^2 l'est. En déduire le point H de la route le plus proche de A et la longueur du trajet minimal.
- 3.4** On admet que, dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si, $mm' = -1$. Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à la tangente à $\mathcal{P}$ en H .

Exercice 4 Un aquarium économique

6 pts ●●●

Un artisan fabrique des aquariums sans couvercle, en forme de pavé droit à base carrée, d'un volume de 32 litres, soit 32 dm^3 . On note x le côté de la base et h la hauteur, en décimètres, avec $x > 0$ (figure 2). Il cherche les dimensions qui utilisent le moins de verre possible.

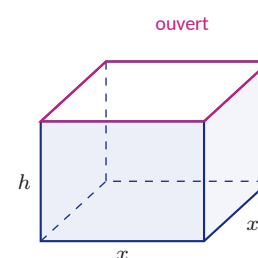


Figure 2 — L'aquarium

- 4.1** Exprimer h en fonction de x . Montrer que l'aire totale des cinq faces vitrées, en dm^2 , est $S(x) = x^2 + \frac{128}{x}$.
- 4.2** Montrer que $S'(x) = \frac{2(x^3 - 64)}{x^2}$. Vérifier ensuite que l'on a $x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$.
- 4.3** Dresser le tableau de variations de S sur $]0; +\infty[$ (sans limites). En déduire les dimensions de l'aquarium le plus économique en verre, et l'aire de verre correspondante.
- 4.4** Le verre coûte 2,50 euros le décimètre carré. Pour un aquarium dont la base a pour côté 8 dm, quel surcoût en verre l'artisan paie-t-il par rapport à l'aquarium optimal ?
- 4.5** On remplace 32 par un volume quelconque $V > 0$ (en dm^3). Démontrer que l'aquarium le plus économique a toujours une hauteur égale à la moitié du côté de sa base.