

PREMIÈRE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 6

Contrôle A Variations et extremums

QCM, étude d'une fonction polynôme, une fonction rationnelle impaire, rectangle sous une parabole

Durée : 1 h · sans calculatrice · 4 exercices indépendants · barème sur 20



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

La calculatrice n'est pas autorisée. Les réponses du QCM ne demandent aucune justification ; dans les autres exercices, tout résultat doit être justifié par un calcul ou un raisonnement, et les résultats sont donnés sous forme exacte. Les tableaux de variations doivent être complets (signe de la dérivée, flèches, valeurs). La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●○○

Pour chacune des cinq questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1.1 Une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ a pour dérivée $f'(x) = -(x-1)^2$. Alors :

- a) f est croissante sur $\mathbb{R}$ b) f est décroissante sur $\mathbb{R}$
 c) f admet un maximum local en 1 d) f admet un minimum local en 1

1.2 Une fonction f a le tableau de variations ci-contre ; sa courbe se trace sans lever le crayon. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ dans $[-3; 4]$ est :

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

x	-3	0	4
$f(x)$	1	5	-2

1.3 La courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^4 - 2x^2$ est symétrique par rapport :

- a) à l'axe des abscisses b) à l'axe des ordonnées c) à l'origine du repère d) à la droite $y = x$

1.4 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$ admet un minimum égal à :

- a) 3 b) 5 c) -13 d) 13

1.5 La fonction g définie sur $] -1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{2x-1}{x+1}$:

- a) a pour dérivée $g'(x) = 2$ b) est strictement croissante sur $] -1; +\infty[$
 c) admet un minimum en $\frac{1}{2}$ d) est strictement décroissante sur $] -1; +\infty[$

Exercice 2 Étude d'une fonction polynôme de degré 3

5 pts ●○○

Soit f la fonction définie sur $[-2; 3]$ par $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 4$.

2.1 Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = -6(x+1)(x-2)$.

2.2 Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-2; 3]$, puis dresser le tableau de variations complet de f .

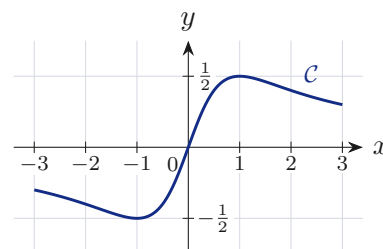
2.3 Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[-2; 3]$. En quels points la courbe de f admet-elle une tangente horizontale ?

- 2.4** Déterminer, à l'aide du tableau de variations, le nombre de solutions dans $[-2; 3]$ de l'équation $f(x) = 0$, puis de l'équation $f(x) = 10$.

Exercice 3 Une fonction rationnelle impaire

5 pts ●●○

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative, tracée ci-contre sur $[-3; 3]$.

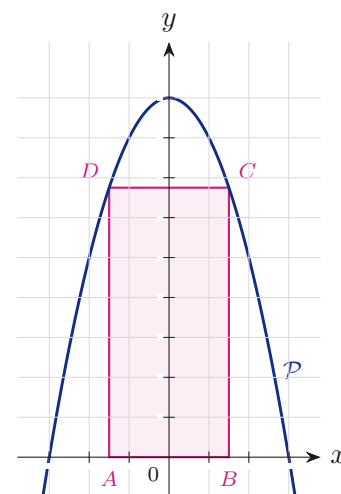
Figure 1 — La courbe $\mathcal{C}$

- 3.1** Démontrer que f est impaire. Quelle propriété géométrique de $\mathcal{C}$ en découle ?
- 3.2** Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$.
- 3.3** Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[-3; 3]$. Expliquer comment la question 3.1 permet de contrôler ce tableau.
- 3.4** Démontrer que, pour tout réel x , $\frac{1}{2} - f(x) = \frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}$. En déduire que $f(x) \leq \frac{1}{2}$ pour tout réel x , puis, à l'aide de la question 3.1, que $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.
- 3.5** Déterminer, à l'aide du tableau de variations, le nombre de solutions dans $[-3; 3]$ de l'équation $f(x) = \frac{2}{5}$, puis résoudre cette équation.
- 3.6** Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ à l'origine, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de T .

Exercice 4 Un rectangle sous une parabole

5 pts ●●○

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = 9 - x^2$. Pour tout réel $x \in [0; 3]$, on construit le rectangle $ABCD$ où $A(-x; 0)$ et $B(x; 0)$ sont sur l'axe des abscisses, et C et D sont les points de $\mathcal{P}$ d'abscisses respectives x et $-x$ (figure 2).

Figure 2 — Le rectangle $ABCD$

- 4.1** Exprimer les longueurs AB et BC en fonction de x . En déduire que l'aire du rectangle $ABCD$ est $\mathcal{A}(x) = 18x - 2x^3$.
- 4.2** Étudier les variations de $\mathcal{A}$ sur $[0; 3]$. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire est maximale, et cette aire maximale.
- 4.3** Montrer que le périmètre du rectangle est $p(x) = -2x^2 + 4x + 18$. Pour quelle valeur de x est-il maximal ? Le rectangle d'aire maximale est-il aussi celui de périmètre maximal ?
- 4.4** Justifier, à l'aide du tableau de variations de $\mathcal{A}$, que l'équation $\mathcal{A}(x) = 16$ a exactement deux solutions dans $[0; 3]$. Vérifier que 1 est l'une d'elles, puis, en remarquant que $x^3 - 9x + 8 = (x-1)(x^2 + x - 8)$, déterminer l'autre.