

Exercices 2 Variables aléatoires

Application : assurance, lancers francs, surréservation, programmes Python, moyenne d'un échantillon

5 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Modéliser une situation par une variable aléatoire, déterminer sa loi (au besoin avec un arbre pour $n \leq 4$ épreuves de Bernoulli indépendantes) ; utiliser l'espérance pour fixer une prime ou une mise, puis l'écart type pour comparer les risques de deux stratégies.
- Compléter et interpréter des programmes Python : espérance et variance d'une loi, simulation d'échantillons ; observer que la moyenne d'un échantillon de taille n s'écarte rarement de l'espérance μ de plus de $2\sigma/\sqrt{n}$.

Exercice 1 Assurer un smartphone

●●○

Une compagnie propose un contrat annuel d'assurance pour smartphone. Ses statistiques montrent que, sur une année, 85 % des assurés ne déclarent aucun sinistre, 10 % déclarent un écran cassé (coût de la réparation pour l'assureur : 120 euros), 4 % une panne de la carte mère (coût : 250 euros) et 1 % un vol (remboursement : 800 euros) ; on admet qu'un assuré déclare au plus un sinistre par an. On choisit un contrat au hasard et on note C le coût annuel, en euros, de ce contrat pour l'assureur.

- 1.1 Donner la loi de C . Calculer $E(C)$ et interpréter ce nombre.
- 1.2 Calculer $E(C^2)$, puis $V(C)$ et $\sigma(C)$ (arrondi à l'euro).
- 1.3 La prime annuelle payée par l'assuré est de p euros ; le bénéfice de l'assureur sur le contrat est $B = p - C$. Exprimer $E(B)$ en fonction de p ; justifier que $\sigma(B) = \sigma(C)$. Quelle prime minimale évite à l'assureur de perdre de l'argent en moyenne ? Quelle prime lui assure un bénéfice moyen égal à 20 % de la prime ?
- 1.4 L'assureur propose une variante avec franchise : l'assuré paie lui-même les 50 premiers euros de chaque sinistre (vol compris). Déterminer la loi du nouveau coût C' pour l'assureur et $E(C')$. De combien peut-il baisser la prime tout en conservant le même bénéfice moyen ?

Exercice 2 Tirs au basket : trois lancers francs

●●○

Une joueuse de basket réussit un tir à trois points avec la probabilité 0,35 ; un tel tir lui rapporte donc en moyenne $3 \times 0,35 = 1,05$ point. Victime d'une faute sur un tir à trois points manqué, elle obtient trois lancers francs, qui rapportent chacun un point s'ils sont réussis. Elle réussit chaque lancer franc avec la probabilité 0,8, indépendamment des autres. On note Y le nombre de points marqués sur ces lancers francs.

- 2.1 Construire un arbre pondéré et démontrer que $P(Y = 2) = 0,384$. Donner la loi de Y et calculer $P(Y \geq 1)$.
- 2.2 Calculer $E(Y)$ et comparer avec $3 \times 0,8$, puis calculer $V(Y)$ à l'aide de la formule de König-Huygens. Pour l'équipe adverse, cette faute a-t-elle été coûteuse en moyenne ? (On comparera $E(Y)$ au nombre moyen de points rapportés par un tir à trois points de cette joueuse.)

Exercice 3 La surréservation d'un avion-taxi

●●○

Une compagnie d'avions-taxis exploite un appareil de 3 places passagers. Elle vend des billets à 200 euros, non remboursables. Chaque client ayant acheté un billet se présente à l'embarquement avec la probabilité 0,8, indépendamment des autres. Pour limiter les places vides, elle vend quatre billets par vol ; si les quatre clients se présentent, l'un d'eux est refusé et reçoit une indemnité de 300 euros. On note X le nombre de clients qui se présentent et R la recette du vol (billets vendus moins indemnité éventuelle), en euros.

- 3.1** Décrire l'arbre pondéré associé aux quatre clients. Démontrer que $P(X = 4) = P(X = 3) = 0,4096$, puis donner la loi complète de X et calculer $E(X)$.
- 3.2** Quelles valeurs R peut-elle prendre ? Donner la loi de R et démontrer que $E(R) = 677,12$. Comparer avec la recette obtenue en vendant seulement trois billets.
- 3.3** Calculer $\sigma(R)$ (arrondi à l'euro). Quel est l'inconvénient de la surréservation, pour la compagnie et pour les clients ? Jusqu'à quel montant de l'indemnité la vente de quatre billets reste-t-elle plus rentable en moyenne que celle de trois billets ?

Exercice 4 Une fonction Python pour l'espérance et la variance



Une loi de probabilité est décrite par deux listes Python de même longueur : `valeurs` contient les valeurs x_i et `probas` les probabilités p_i correspondantes. La fonction ci-contre doit renvoyer l'espérance et la variance de la loi (calculée avec la formule de König-Huygens).

- 4.1** Recopier et compléter les lignes 6 et 7 de la fonction.

```
1 def esperance_variance(valeurs, probas):
2     E = 0
3     E2 = 0
4     for i in range(len(valeurs)):
5         E = E + valeurs[i] * probas[i]
6         E2 = .....
7         V = .....
8     return E, V
```

- 4.2** Une boulangerie offre à chaque client une carte à gratter : 90 % des cartes ne font rien gagner, 8 % donnent un bon d'achat de 10 euros et 2 % un bon de 50 euros. Écrire l'appel de la fonction qui donne l'espérance et la variance de la valeur X d'une carte, puis calculer à la main les deux nombres renvoyés. En déduire $\sigma(X)$.
- 4.3** La boulangerie distribue 500 cartes par mois. Quel coût moyen mensuel doit-elle prévoir ? Écrire une fonction `ecart_type(valeurs, probas)` qui utilise `esperance_variance` et la fonction `sqrt` du module `math`.

Exercice 5 Simuler des échantillons : l'écart $2\sigma/\sqrt{n}$



On lance un dé cubique équilibré et on note X le numéro obtenu. Un échantillon de taille n est la liste des n résultats obtenus en répétant ce lancer de façon indépendante ; on s'intéresse à la moyenne M de ces n résultats.

- 5.1** Calculer $\mu = E(X)$ et démontrer que $V(X) = 35/12$. En déduire $\sigma = \sigma(X)$ (arrondi au millième).

```
1 from random import randint
2 def moyenne_echantillon(n):
3     s = 0
4     for i in range(n):
5         s = s + randint(1, 6)
6     return s / n
7
8 def proportion(N, n, mu, e):
9     compteur = 0
10    for k in range(N):
11        m = moyenne_echantillon(n)
12        if .....:
13            compteur = compteur + 1
14    return compteur / N
```

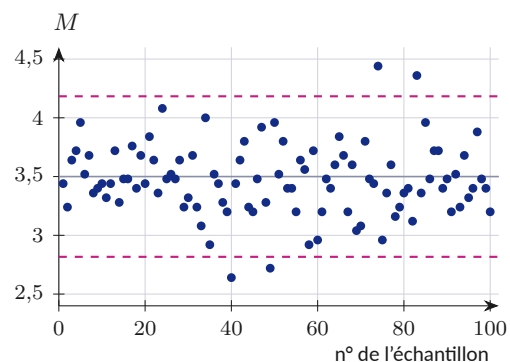


Figure 1 — Moyennes de 100 échantillons de taille 25

- 5.2** La fonction `moyenne_echantillon` simule un échantillon de taille n et renvoie sa moyenne. La figure 1 représente les moyennes de 100 échantillons de taille $n = 25$; les droites en pointillés ont pour équations $y = \mu - 2\sigma/\sqrt{25}$ et $y = \mu + 2\sigma/\sqrt{25}$. Calculer ces deux nombres (arrondis au centième), puis déterminer la proportion des moyennes situées dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma/\sqrt{n}; \mu + 2\sigma/\sqrt{n}]$.
- 5.3** La fonction `proportion` simule N échantillons de taille n et renvoie la proportion de ceux dont la moyenne s'écarte de μ d'au plus e . Compléter la ligne 12.
- 5.4** Les appels `proportion(1000, 25, 3.5, 0.683)` et `proportion(1000, 100, 3.5, 0.342)` ont renvoyé 0,952 et 0,956. D'où viennent les nombres 0,683 et 0,342 ? Que constate-t-on ? Que devient la largeur de l'intervalle quand la taille de l'échantillon est multipliée par 4 ?