

Contrôle B Trigonométrie

Démonstration des valeurs en $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, vrai ou faux, un satellite en orbite, le laser et le capteur

Durée : 1 h · sans calculatrice · 4 exercices indépendants · barème sur 20



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

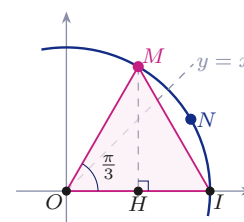
★ CONSIGNES

La calculatrice n'est pas autorisée. Tout résultat doit être justifié ; dans l'exercice 2, une réponse « vrai » ou « faux » non justifiée ne rapporte aucun point. Les résultats sont donnés sous forme exacte. Pour résoudre une équation, on s'appuiera sur une figure du cercle trigonométrique. La qualité de la rédaction et la rigueur des démonstrations sont prises en compte dans la notation.

Exercice 1 Démonstration : cosinus et sinus de $\frac{\pi}{3}$ et de $\frac{\pi}{6}$

5 pts ●●●○

Dans un repère orthonormé d'origine O , on considère le cercle trigonométrique, le point $I(1; 0)$, le point M image du réel $\frac{\pi}{3}$ et le point H , projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses (figure 1).

Figure 1 — Le point M et le point N

- 1.1 Démontrer que le triangle OIM est équilatéral.
- 1.2 Justifier que H est le milieu du segment $[OI]$. En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{3}$.
- 1.3 À l'aide de la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, démontrer que $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 1.4 Le point N est l'image du réel $\frac{\pi}{6}$. Justifier que N est le symétrique de M par rapport à la droite d'équation $y = x$, puis en déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{6}$ et de $\sin \frac{\pi}{6}$.
- 1.5 Application : calculer $A = \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{3}$ et $B = \sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{5\pi}{6}$.

Exercice 2 Vrai ou faux ?

4 pts ●●●○

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Un contre-exemple suffit pour justifier qu'une affirmation est fausse.

- 2.1 Les réels $\frac{13\pi}{4}$ et $-\frac{11\pi}{4}$ ont la même image sur le cercle trigonométrique.
- 2.2 Pour tout réel x , si $\cos x = \frac{3}{5}$, alors $\sin x = \frac{4}{5}$.
- 2.3 Sur un cercle de rayon 5 cm, un arc de 10 cm est intercepté par un angle au centre obtus.
- 2.4 L'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[0; 4\pi[$.
- 2.5 Pour tout réel x , $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$.

Exercice 3 Un satellite en orbite basse

5 pts ●●●○

On modélise l'orbite d'un satellite par un cercle de centre T (le centre de la Terre) et de rayon $6\,800\text{ km}$, parcouru à vitesse constante en 90 minutes. Dans le plan de l'orbite, on se place dans un repère orthonormé d'origine T , d'unité le kilomètre, orienté pour que le satellite tourne dans le sens direct ; à l'instant $t = 0$, il est au point $S_0(6\,800 ; 0)$, et à l'instant t il est au point du cercle associé au réel θ , de coordonnées $(6\,800 \cos \theta ; 6\,800 \sin \theta)$.

- 3.1 De quel angle, en radians, le satellite tourne-t-il autour de T en une minute ? en 15 minutes ? en une heure ?
- 3.2 Quelle distance parcourt-il en 15 minutes ? Exprimer sa vitesse en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ en fonction de π puis, sachant que $3 < \pi < 3,2$, montrer qu'elle est comprise entre $27\,000\text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et $30\,000\text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.
- 3.3 Donner les coordonnées exactes du satellite au bout de 15 min, de 75 min, puis de 2 h.
- 3.4 Au cours du premier tour, à quels instants l'abscisse du satellite est-elle égale à $-3\,400$?
- 3.5 À quels instants du premier tour le satellite se trouve-t-il sur la droite d'équation $y = x$? Donner les réponses en minutes et secondes.
- 3.6 Où se trouve le satellite au bout de 24 heures ? Au bout de 1 000 minutes, déterminer la mesure principale du réel associé à sa position, puis la convertir en degrés.

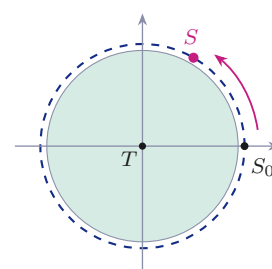


Figure 2 — L'orbite (Terre à l'échelle)

Exercice 4 Le laser et le capteur

6 pts ●●●●

Pour un spectacle, un laser est placé au centre O d'une salle circulaire de rayon 20 m . Il tourne à vitesse constante dans le sens direct et fait un tour en 8 secondes. On se place dans un repère orthonormé d'origine O , d'unité le mètre ; à l'instant $t = 0$, le faisceau frappe le mur au point $P_0(20 ; 0)$.

- 4.1 De quel angle le laser tourne-t-il en une seconde ? Justifier qu'à l'instant t (en secondes), le faisceau frappe le mur au point P de coordonnées $\left(20 \cos \frac{\pi t}{4} ; 20 \sin \frac{\pi t}{4}\right)$.
- 4.2 Donner les coordonnées exactes de P aux instants $t = 10$ et $t = 29$.
- 4.3 Au cours d'un tour, pendant combien de temps l'ordonnée du point d'impact est-elle supérieure ou égale à $10\sqrt{2}$?
- 4.4 Montrer que le point d'impact se déplace sur le mur à une vitesse comprise entre $15\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $16\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (on rappelle que $3 < \pi < 3,2$).
- 4.5 Un capteur est fixé au point $C(-10 ; 10\sqrt{3})$. Vérifier que C est sur le mur, puis déterminer tous les instants de l'intervalle $[0 ; 20]$ où le faisceau frappe le capteur.
- 4.6 Un second laser, placé lui aussi en O , frappe le mur au point $(-20 ; 0)$ à l'instant $t = 0$; il tourne à la même vitesse, mais dans le sens des aiguilles d'une montre. Déterminer les instants de $[0 ; 10]$ où les deux faisceaux frappent le mur au même point, et préciser ces points.

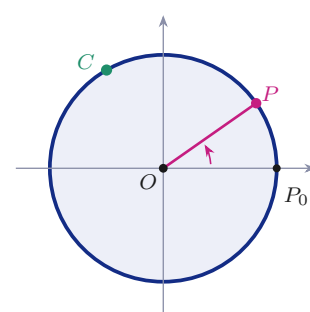


Figure 3 — Vue de dessus de la salle